Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

Corrigé de la 2ème épreuve 2008

I. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'application $f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$ est dérivable (donc continue) sur $[0\,;+\infty[$ et :

$$\forall x \in [0\,;+\infty[,\quad f_n'(x) = nx^{n-1} + \cdots + 2x + 1 > 0.$$

De plus : $$f_n(0) = -1 < 0 \quad \text{et} \quad f_n(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

On en déduit le tableau de variation de f_n :

x	0		$+\infty$
$f_n(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le théorème de la bijection réciproque, on conclut que l'équation

$$(E_n) \qquad x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0,$$

d'inconnue $x \in [0\,;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée u_n.

De plus, $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n - 1 \geqslant 0$, donc : $\boxed{0 < u_n \leqslant 1}$

Remarque : Nous aurons besoin de l'inégalité stricte $0 < u_n$ *pour la question suivante.*

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a : $$f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + \cdots + u_n - 1 = u_n^{n+1} + \underbrace{f_n(u_n)}_{=0} = u_n^{n+1} > 0 = f_{n+1}(u_{n+1}).$$

Comme f_{n+1} est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, il s'ensuit : $u_n < u_{n+1}$, et on conclut :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est strictement croissante}}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} 0 &= (u_n^n + u_n^{n-1} + \cdots + u_n - 1)(u_n - 1) = \big((u_n^n + u_n^{n-1} + \cdots + 1) - 2\big)(u_n - 1) \\ &= (u_n^n + u_n^{n-1} + \cdots + 1)(u_n - 1) - 2(u_n - 1) = (u_n^{n+1} - 1) - 2(u_n - 1) = u_n^{n+1} - 2u_n + 1. \end{aligned}$$

On conclut :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n^{n+1} - 2u_n + 1 = 0}$$

4) a) • Pour $n = 1$: $u_1 - 1 = 0$, donc : $\boxed{u_1 = 1}$

• Pour $n = 2$: $u_2^2 + u_2 - 1 = 0$ et $u_2 > 0$, donc : $\boxed{u_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

4) b) Comme $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est (strictement) décroissante, on a, pour $n \geqslant 2$: $0 < u_n^{n+1} \leqslant u_2^{n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$,

car $u_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \in [0\,;1[$.

Puis : $2u_n - 1 = u_n^{n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, et on conclut : $\boxed{u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}}$

5) On a, pour $n \geqslant 1$: $\qquad 0 = u_n^{n+1} - 2u_n + 1 = u_n^{n+1} - 2\Big(\dfrac{1}{2} + \varepsilon_n\Big) + 1 = u_n^{n+1} - 2\varepsilon_n,$

donc, pour $n \geqslant 2$: $\quad 0 \leqslant n\varepsilon_n = \dfrac{1}{2} n u_n^{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} u_2^{n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0,$ par prépondérance classique.

On conclut : $\boxed{n\varepsilon_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0}$

6) On a, pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} u_n - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} u_n^{n+1} = \frac{1}{2}\exp\Big((n+1)\ln\Big(\frac{1}{2} + \varepsilon_n\Big)\Big) = \frac{1}{2}\exp\Big((n+1)\ln\frac{1}{2} + (n+1)\ln(1+2\varepsilon_n)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\exp\Big((n+1)\ln\frac{1}{2} + 2(n+1)\varepsilon_n + o(n\varepsilon_n)\Big) = \frac{1}{2^{n+2}}\exp\big(\underbrace{2n\varepsilon_n + \varepsilon_n + o(n\varepsilon_n)}_{\underset{n\infty}{\longrightarrow} 0}\big) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2^{n+2}}. \end{aligned}$$

Donc : $\quad u_n - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^{n+2}}\big(1 + o(1)\big),$ et on conclut : $\boxed{u_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4 \cdot 2^n} + o\Big(\dfrac{1}{2^n}\Big)}$

7) a) En utilisant les applications f_n définies dans la solution de 1), on a, à la calculatrice :

n	1	2	3	4	5
$f_n\Big(\dfrac{1}{2} + 10^{-2}\Big)$	$-0,49 < 0$	$-0,2299 < 0$	$-0,097249 < 0$	$-0,000296 < 0$	$0,00491 > 0$

On a donc : $\dfrac{1}{2} < u_5 < \dfrac{1}{2} + 10^{-2} < u_4,$

et on conclut que le plus petit entier $s \geqslant 1$ pour lequel on a $0 < u_s - \dfrac{1}{2} < 10^{-2}$ est : $\boxed{s = 5}$

7) b) De même que dans la question 3., on a : $\forall x \in [0\,;+\infty[, \quad g_n(x) = (x-1)f_n(x) = x^{n+1} - 2x + 1.$

D'autre part, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, comme $\Big(\dfrac{1}{2} + 10^{-p}\Big) - 1 < 0$ et que f_n est strictement croissante, on a :

$$u_n \leqslant \frac{1}{2} + 10^{-p} \iff f_n(u_n) \leqslant f_n\Big(\frac{1}{2} + 10^{-p}\Big) \iff 0 \leqslant f_n\Big(\frac{1}{2} + 10^{-p}\Big) \iff g_n\Big(\frac{1}{2} + 10^{-p}\Big) \leqslant 0.$$

On calcule donc les $g_n\Big(\dfrac{1}{2} + 10^{-p}\Big)$, $n \geqslant 1$, jusqu'à trouver le premier d'entre eux qui soit $\leqslant 0$.

Une procédure possible, en français, est :

`Entrer` p
$n := 1$
`Tant que` $g_n\Big(\dfrac{1}{2} + 10^{-p}\Big) > 0,$ `faire` $n := n + 1$
`afficher` $'s =' \, n$.

8) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, en utilisant la fonction g_n définie en 7. :

$$\begin{aligned} u_n \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} &\iff g_n(u_n) \geqslant g_n\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\Big) \iff 0 \geqslant \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\Big)^{n+1} - 2\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\Big) + 1 \\ &\iff \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\Big)^{n+1} \leqslant \frac{1}{n} \iff \Big(\frac{n+1}{2n}\Big)^{n+1} \leqslant \frac{1}{n} \iff \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

8) b) L'application $\psi : x \longmapsto (x+1)\ln(x+1) - x\ln x - (x+1)\ln 2$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$\psi'(x) = \big(\ln(x+1)+1\big) - (\ln x + 1) - \ln 2 = \ln \frac{x+1}{2x}.$$

On a : $\psi'(x) > 0 \iff \dfrac{x+1}{2x} > 1 \iff x < 1$ et de même pour l'autre inégalité et pour l'égalité.

D'où le tableau de variation de ψ :

x	0		1		$+\infty$
$\psi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\psi(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Il en résulte : $\qquad \forall x \in]0\,;+\infty[,\quad \psi(x) \leqslant 0.$

Et :

$$\psi(x) \leqslant 0 \iff (x+1)\ln(x+1) - x\ln x - (x+1)\ln 2 \leqslant 0 \iff -(x+1)\ln 2 \leqslant x\ln x - (x+1)\ln(x+1)$$
$$\iff \ln\frac{1}{2^{x+1}} \leqslant \ln\frac{x^x}{(x+1)^{x+1}} \iff \frac{1}{2^{x+1}} \leqslant \frac{x^x}{(x+1)^{x+1}}.$$

On a donc, en particulier : $\qquad \forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\},\quad \dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$

Et l'inégalité est vraie pour $n = 1$ (c'est alors une égalité).
De plus, l'inégalité est stricte pour $n \geqslant 2$, ce que l'on utilisera en II 1)b).

9) a) D'une part : $g_4\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = \Big(\dfrac{1}{2}\Big)^5 > 0.$

D'autre part : $\qquad g_4\Big(\dfrac{6}{11}\Big) = \Big(\dfrac{6}{11}\Big)^5 - 2\dfrac{6}{11} + 1 = \Big(\dfrac{6}{11}\Big)^5 - \dfrac{1}{11}.$

D'où : $\qquad g_4\Big(\dfrac{6}{11}\Big) < 0 \iff \Big(\dfrac{6}{11}\Big)^5 < \dfrac{1}{11} \iff 6^5 < 11^4 \iff 7776 < 14641,$

et cette dernière inégalité est vraie.

Comme g_4 est continue sur l'intervalle $\Big[\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{6}{11}\Big]$ et s'annule en u_4 seulement, on déduit : $\dfrac{1}{2} < u_4 < \dfrac{6}{11}.$

9) b) • L'application $h :]0\,;1[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \dfrac{x}{2(1-x)}$ est croissante, car elle est dérivable et :

$$\forall x \in]0\,;1[,\quad h'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2} > 0.$$

Puisque $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, par composition, la suite $\left(\dfrac{u_n}{2(1-u_n)}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

En particulier : $\qquad \forall n \geqslant 4,\quad \dfrac{u_n}{2(1-u_b)} \leqslant \dfrac{u_4}{2(1-u_4)}.$

• Considérons les applications $k :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto k(x) = \dfrac{x^{\frac{x}{x+1}}}{x+1}$

et $\ell :]1\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \ell(x) = \ln k(x) = \dfrac{x}{x+1}\ln x - \ln(x+1) = \dfrac{x\ln x - (x+1)\ln(x+1)}{x+1}.$

L'application ℓ est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]1\,;+\infty[$:

$$\ell'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}\Big(\big(\ln x - \ln(x+1)\big)(x+1) - \big(x\ln x - (x+1)\ln(x+1)\big)\Big) = \frac{\ln x}{(x+1)^2} > 0.$$

Il en résulte que ℓ est croissante sur $]1\,;+\infty[$, puis, par composition avec l'exponentielle, que k est croissante sur $]1\,;+\infty[$.

En particulier : $\quad \forall\, n \geqslant 4, \quad k(x) \geqslant k(4) = \dfrac{4^{4/5}}{5}.$

• Il nous suffit donc de montrer : $h(u_4) < k(4)$.

Comme $u_4 < \dfrac{6}{11}$ et que h est croissante, on a : $h(u_4) \leqslant h\Big(\dfrac{6}{11}\Big) = \dfrac{\frac{6}{11}}{2\Big(1-\frac{6}{11}\Big)} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}.$

Il reste à prouver : $\dfrac{3}{5} < \dfrac{4^{4/5}}{5} \qquad (E).$

On a : $\quad (E) \iff 3 < 4^{4/5} \iff 3^5 < 4^4 \iff 243 < 256,$ et cette dernière inégalité est vraie.

On conclut : $\boxed{\forall\, n \geqslant 4, \quad \dfrac{u_n}{2(1-u_n)} < \dfrac{n^{n+1}}{n+1}}$

II. Expression de u_n comme somme d'une série

1) a) Notons, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$: $s_{p,n} = \dfrac{1}{2n}\dbinom{n(p+1)}{n-1}$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad s_{p,n} > 0 \quad$ et :

$$\begin{aligned}
\frac{s_{p,n+1}}{s_{p,n}} &= \frac{\dfrac{1}{2(n+1)}\dbinom{(n+1)(p+1)}{n}}{\dfrac{1}{2n}\dbinom{n(p+1)}{n-1}} \\
&= \frac{n}{n+1}\,\frac{\big((n+1)(p+1)\big)!}{n!(np+p+1)!}\,\frac{(n-1)!(np+1)!}{(np+n)!} = \frac{n}{n+1}\,\frac{(np+n+p+1)!}{(np+n)!}\,\frac{(n-1)!}{n!}\,\frac{(np+1)!}{(np+p+1)!} \\
&= \frac{1}{n+1}\,\frac{(np+n+p+1)\cdots(np+n+1)}{(np+p+1)\cdots(np+2)} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n}\,\frac{(p+1)^{p+1}n^{p+1}}{p^p n^p} = \frac{(p+1)^{p+1}}{p^p}.
\end{aligned}$$

On a donc : $\quad \dfrac{s_{p,n+1}}{s_{p,n}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \dfrac{(p+1)^{p+1}}{p^p}.$

D'après la règle de d'Alembert, on conclut que le rayon de convergence ρ_p de la série entière S_p est donné par :

$$\boxed{\rho_p = \frac{p^p}{(p+1)^{p+1}}}$$

1) b) En notant $x = 2^{-(p+1)}$, on a : $s_{p,n}x^n = \dfrac{1}{2n}\dbinom{n(p+1)}{n-1}2^{-(p+1)n} = \dfrac{1}{n2^{n(p+1)+1}}\dbinom{n(p+1)}{n-1}.$

D'après I 8), on a : $\quad \dfrac{1}{2^{p+1}} \leqslant \dfrac{p^p}{(p+1)^{p+1}},$

et on a même l'inégalité stricte, pour $p \geqslant 2$: $\dfrac{1}{2^{p+1}} < \dfrac{p^p}{(p+1)^{p+1}} = \rho_p.$

Il en résulte, d'après le cours sur les séries entières, que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n2^{n(p+1)+1}}\binom{n(p+1)}{n-1}$ est (absolument) convergente, donc la série du second membre de la relation (T_p) est convergente.

2) a) • Pour $n = 1$:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^{2k+1}} \binom{2k}{k-1} = \frac{1}{2^3}\binom{2}{0} = \frac{1}{8}$$
et
$$\frac{1}{2} - \frac{2(n+2)}{(n+1)2^{2n+3}} \binom{2(n+1)}{n} = \frac{1}{2} - \frac{2\cdot 3}{2\cdot 2^5}4 = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8},$$
d'où l'égalité voulue.

• Supposons l'égalité vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a alors :
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k2^{2k+1}} \binom{2k}{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^{k+1}} \binom{2k}{k-1} + \frac{1}{(n+1)2^{2n+3}} \binom{2(n+1)}{n}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{2(n+2)}{(n+1)2^{2n+3}} \binom{2(n+1)}{n} + \frac{1}{(n+1)2^{2n+3}} \binom{2(n+1)}{n} = \frac{1}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)2^{2n+3}} \binom{2n+2}{n}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)2^{2n+3}} \frac{(2n+2)!}{n!(n+2)!} = \frac{1}{2} - \frac{(2n+4)!}{(2n+4)(n+1)!2^{2n+3}(n+2)!}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{n+3}{(2n+4)2^{2n+3}} \frac{(2n+4)!}{(n+1)!(n+3)!} = \frac{1}{2} - \frac{2(n+3)}{(n+2)2^{2n+5}} \binom{2(n+2)}{n+1},$$
ce qui montre l'égalité pour $n+1$.

On conclut, par récurrence sur $n \geqslant 1$, à l'égalité voulue, pour tout $n \geqslant 1$.

2) b) Déterminons la limite, lorsque l'entier n tend vers l'infini, du second membre de a). On a :
$$\frac{2(n+2)}{(n+1)2^{2n+3}} \binom{2(n+1)}{n} = \frac{2(n+2)}{(n+1)2^{2n+3}} \frac{(2n+2)!}{n!(n+2)!} = \frac{2(n+2)(2n+2)(2n+1)}{(n+1)2^{2n+3}(n+2)(n+1)} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$
D'après la formule de Stirling : $\displaystyle \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\sqrt{2\pi 2n}}{\left(\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)^2} = \frac{2^{2n}\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}},$

donc :
$$\frac{2(n+2)}{(n+1)2^{2n+3}} \binom{2(n+1)}{n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{2^3 n^3}{2^{2n+3}n^3} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Il en résulte, d'après a) :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^{2k+1}} \binom{2k}{k-1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$
Ceci montre que la série du second membre de (T_1) converge (ce que l'on savait déjà, cf. 1)b)) et que :
$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^{k+1}} \binom{2k}{k-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = u_1.$$
Ainsi, la relation (T_1) est vraie.

3) Écrivons le résultat des Préliminaires, avec l'indice k au lieu de l'indice n donné dans l'énoncé :
$$\forall q \geqslant 1,\ \forall x \in]-1\,;1[,\ \ \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{k+q-1}{k} x^k = \frac{1}{(1+x)^q}.$$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a $n(p+1) \geqslant 1$, d'où, en remplaçant q par $n(p+1)$:
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n(p+1)-1}{k} x^k = \frac{1}{(1+x)^{n(p+1)}}.$$
Enfin, en multipliant par x^n : $\displaystyle \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{n(p+1)+k-1}{k} x^{n+k} = \frac{x^n}{(1+x)^{n(p+1)}}.$

4) a) Avec la notation de I 5), on a, pour tout $p \geqslant 1$: $v_p = 2u_p - 1 = 2\Big(u_p - \dfrac{1}{2}\Big) = 2\varepsilon_p$.

Et on avait vu en I 5) : $u_p^{p+1} = 2\varepsilon_p$.

D'où :
$$v_p = 2\varepsilon_p = u_p^{p+1} = \Big(\frac{1+v_p}{2}\Big)^{p+1} = \frac{(1+v_p)^{p+1}}{2^{p+1}},$$

et donc :
$$\frac{v_p}{(1+v_p)^{p+1}} = \frac{1}{2^{p+1}}.$$

4) b) Pour $p \geqslant 2$ et $n \geqslant 1$, on a $v_p \in]-1\,;1[$, donc on peut remplacer x par v_p dans la série entière du II 3), d'où :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{n(p+1)+k-1}{k} v_p^{n+k} = \frac{v_p^n}{(1+v_p)^{n(p+1)}} = \Big(\frac{v_p}{(1+v_p)^{p+1}}\Big)^n \underset{II4)a)}{=} \Big(\frac{1}{2^{p+1}}\Big)^n = \frac{1}{2^{n(p+1)}}.$$

5) a) D'après 4)b), on a, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = \frac{1}{2n}\binom{n(p+1)}{n-1} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{n(p+1)+k-1}{k} v_p^{n+k} = \frac{1}{2n}\binom{n(p+1)}{n-1}\frac{1}{2^{n(p+1)}} = \frac{1}{n2^{n(p+1)+1}}\binom{n(p+1)}{n-1}.$$

D'autre part, d'après 1)b), on a vu que cette série (indice n) est convergente. On a donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^{n(p+1)+1}}\binom{n(p+1)}{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}\Big).$$

5) b) De même qu'en 3), en remplaçant x par $-x$, puis en multipliant par x^n, on a, pour tous $n \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, $x \in]-1\,;1[$:

$$\frac{x^n}{(1-x)^{n(p+1)}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n(p+1)+k-1}{k} x^{n+k}.$$

En remplaçant x par v_p, il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} |a_{n,k}|$ converge et que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_{n,k}| = \frac{1}{2n}\binom{n(p+1)}{n-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n(p+1)+k-1}{k} v_p^{n+k} = \frac{1}{2n}\binom{n(p+1)}{n-1}\frac{v_p^n}{(1-v_p)^{n(p+1)}}.$$

5) c) Notons, pour tout $n \geqslant 1$: $\displaystyle \alpha_n = \sum_{k=0}^{+\infty}|a_{n,k}| = \frac{1}{2n}\binom{n(p+1)}{n-1}\Big(\frac{v_p}{(1-v_p)^{p+1}}\Big)^n.$

Pour montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\alpha_n$ converge, il suffit, d'après a), de montrer : $\displaystyle\Big|\frac{v_p}{(1-v_p)^{p+1}}\Big| < \rho_p.$

On a :

$$\begin{aligned}0 \leqslant \frac{v_p}{(1-v_p)^{p+1}} &= \frac{2u_p-1}{(2-2u_p)^{p+1}} = \frac{2u_p-1}{2^{p+1}(1-u_p)^{p+1}}\\ &= \frac{u_p^{p+1}}{2^{p+1}(1-u_p)^{p+1}} = \Big(\frac{u_p}{2(1-u_p)}\Big)^{p+1} \underset{I9)b)}{<} \Big(\frac{p^{\frac{p}{p+1}}}{p+1}\Big)^{p+1} = \frac{p^p}{(p+1)^{p+1}} = \rho_p.\end{aligned}$$

On conclut que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}|a_{n,k}|\Big)$ converge.

6) a) • L'application Δ_q est linéaire car, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $P, Q \in \mathbb{R}_{q-1}[\mathrm{X}]$:

$$\begin{aligned}\Delta_q(\alpha P + Q) &= (\alpha P + Q)(\mathrm{X}+1) - (\alpha P + Q)(\mathrm{X}) \\ &= \alpha\big(P(\mathrm{X}+1) - P(\mathrm{X})\big) + \big(Q(\mathrm{X}+1) - Q(\mathrm{X})\big) = \alpha\Delta_q(P) + \Delta_q(Q).\end{aligned}$$

• On a, pour tout $P \in \mathbb{R}_{q-1}[\mathrm{X}]$: $\deg\big(\Delta_q(P)\big) \leqslant \deg(P) \leqslant q-1$,
donc : $\Delta_q(P) \in \mathbb{R}_{q-1}[\mathrm{X}]$. Ceci montre que Δ_q est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{q-1}[\mathrm{X}]$.

• De plus, comme les termes de plus haut degré de $P(\mathrm{X}+1)$ et de $P(\mathrm{X})$ sont égaux, on a, plus précisément, pour tout $P \in \mathbb{R}_{q-1}[\mathrm{X}]$:

$$\deg\big(\Delta_q(P)\big) \leqslant \deg(P) - 1 \leqslant q-2.$$

En réitérant, on déduit : $\deg\big(\Delta_q^q(P)\big) \leqslant -1$, donc $\Delta_q^q(P) = 0$, pour tout $P \in \mathbb{R}_{q-1}[\mathrm{X}]$, donc $\Delta_q^q = 0$.
On conclut que Δ_q est nilpotent.

6) b) *1re méthode :*

Une récurrence immédiate (comme pour la démonstration de la formule du binôme de Newton) montre :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_{q-1}[\mathrm{X}], \quad \Delta_q^q(P) = \sum_{j=0}^{q} (-1)^{q-j} \binom{q}{j} P(\mathrm{X}+j).$$

Comme $\Delta_q^q = 0$, on conclut : $$\sum_{j=0}^{p} (-1)^{q-j} \binom{q}{j} P(\mathrm{X}+j) = 0.$$

2è méthode :

En notant $T : P(\mathrm{X}) \in \mathbb{R}_{q-1}[\mathrm{X}] \longmapsto P(\mathrm{X}+1) \in \mathbb{R}_{q-1}[\mathrm{X}]$ et $I : P(\mathrm{X}) \in \mathbb{R}_{q-1}[\mathrm{X}] \longmapsto P(\mathrm{X}) \in \mathbb{R}_{q-1}[\mathrm{X}]$,
on a : $\Delta_q = T - I$.
comme T et I sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_{q-1}[\mathrm{X}]$ et qu'ils commutent, on a, d'après la formule du binôme de Newton :

$$0 = \Delta_q^q = (T - I)^q = \sum_{j=0}^{q} (-1)^{q-j} \binom{q}{j} T^j.$$

D'autre part, il est clair (par une récurrence immédiate) que :

$$\forall\, j \in \mathbb{N},\ \forall\, P \in \mathbb{R}_{q-1}[\mathrm{X}], \quad T^j(P) = P(\mathrm{X}+j).$$

D'où la formule voulue.

7) a) On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1,\ k\geqslant 0,\ n+k=q+1} a_{n,k} &= \sum_{n=1}^{q+1} a_{n,q+1-n} = \sum_{n=1}^{q+1} \frac{(-1)^{q+1-n}}{2n} \binom{n(p+1)+q-n}{q-n+1} \binom{n(p+1)}{n-1} v_p^{q+1} \\ &= \sum_{n=1}^{q+1} \frac{(-1)^{q+1-n}}{2n} \frac{(np+q)!}{(q-n+1)!(np+n-1)!} \frac{(np+n)!}{(n-1)(np+1)!} v_p^{q+1} \\ &= \sum_{n=1}^{q+1} \frac{(-1)^{q+1-n}}{2} \frac{(np+q)!(np+n)!}{(q-n+1)!(np+n-1)!n!(np+1)!} v_p^{q+1} \\ &= \sum_{n=1}^{q+1} \frac{(-1)^{q+1-n}}{2} \frac{(np+q)!(np+n)}{(q-n+1)!n!(np+1)!} v_p^{q+1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{q+1} \frac{(-1)^{q+1-n}}{2} n(p+1) \frac{(np+q)!}{(np+1)!(q-1)!} \frac{(q-1)!}{(q-n+1)!n!} v_p^{q+1} \\
&= \sum_{n=1}^{q+1} \frac{(-1)^{q+1-n} n(p+1)}{2q} \binom{np+q}{np+1} \binom{q}{q-n+1} v_p^{q+1} \\
&= \frac{p+1}{2\,q!} v_p^{q+1} \sum_{n=1}^{q+1} (-1)^{q+1-n} \binom{q}{n-1} P(n),
\end{aligned}
$$

en notant : $P(\mathrm{X}) = (p\mathrm{X}+q)(p\mathrm{X}+q-1)\cdots(p\mathrm{X}+2) \in \mathbb{R}_{q-1}[\mathrm{X}]$.

D'après 7)b), on déduit :

$$\sum_{n\geqslant 1,\ k\geqslant 0,\ n+k=q+1} a_{n,k} = 0.$$

7) b) D'après les Préliminaires, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}\Big) = \sum_{q=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n\geqslant 1,\, k\geqslant 0,\, n+k=q} a_{n,k}\Big) \underset{7)a)}{=} \sum_{q=0}^{1}\Big(\sum_{n\geqslant 1,\, k\geqslant 0,\, n+k=q} a_{n,k}\Big) = a_{1,0}+a_{1,1}+a_{2,0}.$$

Et :

$$
\begin{aligned}
a_{1,0} &= \frac{1}{2}\binom{p}{0}\binom{p+1}{0} v_p^1 = \frac{1}{2} v_p, \\
a_{1,1} &= \frac{-1}{2}\binom{p+1}{1}\binom{p+1}{0} v_p^2 = -\frac{1}{2}(p+1)v_p^2, \\
a_{2,0} &= \frac{1}{4}\binom{2p+1}{0}\binom{2p+2}{1} = \frac{1}{4}(2p+2)v_p^2 = \frac{p+1}{2} v_p^2.
\end{aligned}
$$

On obtient : $a_{1,0}+a_{1,1}+a_{2,0} = \dfrac{1}{2}v_p = \dfrac{1}{2}(2u_p-1) = u_p - \dfrac{1}{2}$, d'où la relation (T_p), pour $p \geqslant 4$.

8) a) Avec la notation $s_{p,n}$ de la solution de II 1), on a :

$$\lambda_n = \frac{1}{n2^{n(p+1)+1}}\binom{n(p+1)}{n-1} = \frac{1}{2^{n(p+1)}}\frac{1}{2n}\binom{n(p+1)}{n-1} = \frac{1}{2^{n(p+1)}} s_{p,n} > 0$$

et

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \frac{2^{n(p+1)}}{2^{(n+1)(p+1)}}\frac{s_{p,n+1}}{s_{p,n}} = \frac{1}{2^{p+1}}\frac{s_{p,n+1}}{s_{p,n}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2^{p+1}}\frac{(p+1)^{p+1}}{p^p}.$$

En notant $\boxed{\mu_p = \dfrac{1}{2^{p+1}}\dfrac{(p+1)^{p+1}}{p^p} > 0}$ qui est indépendant de n, on a donc : $\lambda_{n+1} \underset{n\infty}{\sim} \mu_p \lambda_n$.

8) b) • On a vu en I 3)a) que, pour $p \geqslant 2$: $\dfrac{1}{2^{p+1}} < \dfrac{p^p}{(p+1)^{p+1}}$, donc : $\mu_p < 1$.

D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, il en résulte que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\lambda_n$ converge.

• Puisque $\lambda_{n+1} \underset{n\infty}{\sim} \mu_p\lambda_n$ et que la série $\sum\limits_{n}\lambda_n$ est à termes > 0 (donc $\geqslant 0$) et est convergente, d'après un théorème de sommation des relations de comparaison, on a : $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\lambda_{k+1} \underset{n\infty}{\sim} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\mu_p\lambda_n$,

c'est-à-dire : $R_p(n+1) \underset{n\infty}{\sim} \mu_p R_p(n)$.

Mais : $R_p(n+1) = R_p(n) - \lambda_{n+1}$, d'où : $\dfrac{R_p(n) - \lambda_{n+1}}{R_p(n)} = \dfrac{R_p(n+1)}{R_p(n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \mu_p$,

donc : $\dfrac{\lambda_{n+1}}{R_p(n)} = -\dfrac{R_p(n+1) - \lambda_{n+1}}{R_p(n)} + 1 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1 - \mu_p$, et enfin : $R_p(n) \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{\lambda_{n+1}}{1-\mu_p} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{\mu_p}{1-\mu_p}\lambda_n$.

III. Réversion de Lagrange

1) a) • L'application $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞, car Φ l'est.

• $F(0,0,0) = 0$

• $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,t,y) = -1 + x\Phi'(y)$, donc $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0,0) = -1 \neq 0$.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert U de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{R}$ et une application $\varphi : U \longrightarrow V$ caractérisée par la condition :

$$\forall\,(x,t) \in U,\ \forall\, y \in V,\quad \big(F(x,t,y) = 0 \iff y = \varphi(x,t)\big).$$

De plus, φ est de classe C^∞ sur U.

Ainsi, il existe un voisinage ouvert U de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une application $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ (et une seule), de classe C^∞, telle que :

$$\varphi(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\,(x,t) \in U,\ \ F\big(x,t,\varphi(x,t)\big) = 0.$$

1) b) On a, pour tout $(x,t) \in U$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\big(x,t,\varphi(x,t)\big) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}\big(x,t,\varphi(x,t)\big)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}\big(x,t,\varphi(x,t)\big)} = -\dfrac{\Phi\big(\varphi(x,t)\big)}{-1 + x\Phi'\big(x,t,\varphi(x,t)\big)} \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\big(x,t,\varphi(x,t)\big) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial t}\big(x,t,\varphi(x,t)\big)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}\big(x,t,\varphi(x,t)\big)} = -\dfrac{1}{-1 + x\Phi'\big(x,t,\varphi(x,t)\big)} \end{cases}$$

d'où :
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\big(x,t,\varphi(x,t)\big) = \Phi\big(\varphi(x,t)\big)\frac{\partial \varphi}{\partial t}\big(x,t,\varphi(x,t)\big),$$

ou encore :
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (\Phi \circ \varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

2) a) L'application u est de classe C^∞ sur U comme composée d'applications de classe C^∞.

On a, par dérivation d'une application composée : $\dfrac{\partial u}{\partial x} = (f' \circ \varphi)\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t} = (f' \circ \varphi)\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$,

d'où, d'après 1)b) :
$$\frac{\partial u}{\partial x} = (f' \circ \varphi)(\Phi \circ \varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial t} = (\Phi \circ \varphi)\frac{\partial u}{\partial t}.$$

2) b) Récurrence sur n.

• Pour $n = 1$, la formule voulue est le résultat de a).

• Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$.

Les applications qui interviennent sont toutes de classe C^∞ et on peut appliquer le théorème de Schwarz pour intervertir l'ordre des dérivations.

On a, en notant $\Psi = \Phi \circ \varphi$ par commodité :

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Big[\Psi^n \frac{\partial u}{\partial t}\Big]\Big) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big[\Psi^n \frac{\partial u}{\partial t}\Big]\Big) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Big(n\Psi^{n-1}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} + \Psi^n \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)$$

$$= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Big(n\Psi^{n-1}\Psi\frac{\partial \Psi}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} + \Psi^n \frac{\partial}{\partial t}\Big(\Psi\frac{\partial u}{\partial t}\Big)\Big) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Big(n\Psi^{n}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} + \Psi^n \frac{\partial \Psi}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} + \Psi^{n+1}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big)$$

$$= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Big(\Big[(n+1)\Psi^n\frac{\partial \Psi}{\partial t}\Big]\frac{\partial u}{\partial t} + \Psi^{n+1}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big[\Psi^{n+1}\frac{\partial u}{\partial t}\Big]\Big) = \frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}}\Big(\Psi^{n+1}\frac{\partial u}{\partial t}\Big),$$

ce qui montre la formule pour $n+1$.

La formule voulue est donc établie, par récurrence sur $n \geqslant 1$.

2) c) Remplaçons x par 0 dans le résultat de b). On a :

$$y = \varphi(0,t) \iff F(0,t,y) = 0 \iff t - y = 0 \iff y = t,$$

donc : $\varphi(0,t) = t$, puis : $\qquad u(t) = (f \circ \varphi)(t) = f(t), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,t) = f'(t).$

Et : $\Phi \circ \varphi(0,t) = \Phi(t)$.

Ainsi : $$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,t) = \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\Big(\big(\Phi(t)\big)^n f'(t)\Big).$$

3) a) Supposons, par exemple, $g'(0) > 0$, le cas $g'(0) < 0$ s'y ramenant en remplaçant g par $-g$.
Puisque g' est continue en 0 (car g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$), il existe un intervalle ouvert J contenant 0 tel que : $\forall s \in J, \quad g'(s) > 0$.
Il en résulte que g est strictement croissante sur J.
Comme $g(0) = 0$, on en déduit : $\forall s \in J - \{0\}, \quad g(s) \neq 0$,
donc $\sigma(s)$ existe pour tout $s \in J - \{0\}$, et d'autre part, $\sigma(0)$ existe.
Ceci montre que σ existe.

3) b) *Remarque : Cette question est inutile, puisque l'on va montrer directement, dans la question c) suivante, que σ est de classe C^∞ au voisinage de 0.*

• D'après a), σ est définie sur un intervalle ouvert J contenant 0.

• On a : $$\sigma(s) = \frac{s}{g(s)} = \frac{s-0}{g(s)-g(0)} = \Big(\frac{g(s)-g(0)}{s-0}\Big)^{-1} \underset{s \to 0}{\longrightarrow} \big(g'(0)\big)^{-1} = \sigma(0),$$

donc σ est continue en 0.

• σ est de classe C^∞, donc de classe C^1, sur $J - \{0\}$ comme quotient de deux fonctions de classe C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas, et on a, pour tout $x \in J - \{0\}$: $\sigma'(s) = \dfrac{g(s) - sg'(s)}{\big(g(s)\big)^2}$.

• Puisque g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, g et g' admettent des développements limités en 0 à tous ordres, et on a :

$$\begin{cases} g(s) = g(0) + sg'(0) + \dfrac{s^2}{2}g''(0) + \underset{s \to 0}{o}(s^2) \\ g'(s) = g'(0) + sg''(0) + o(s), \end{cases}$$

d'où : $$g(s) - sg'(s) = -\frac{s^2}{2}g''(0) + o(s^2),$$

puis : $$\sigma'(s) = \frac{-\dfrac{s^2}{2}g''(0) + o(s^2)}{s^2 g'^2(0) + o(s^2)} \underset{s \to 0}{\longrightarrow} -\frac{g''(0)}{2g'^2(0)}.$$

Puisque σ est de classe C^0 sur J, de classe C^1 sur $J-\{0\}$ et que σ' admet une limite finie en 0, d'après le théorème limite de la dérivée, σ est de classe C^1 sur J.

3) c) Considérons l'application $\quad \tau : J \longrightarrow \mathbb{R},\ \ s \longmapsto \tau(s) = \int_0^1 g'(st)\,\mathrm{d}t.$

On a :
$$\forall\, s \in J,\ \ s\tau(s) = s\int_0^1 g'(st)\,\mathrm{d}t = \big[g(st)\big]_{t=0}^1 = g(s)-g(0) = g(s)$$
et
$$\tau(0) = \int_0^1 g'(0)\,\mathrm{d}t = g'(0).$$

On a vu en 3)a) que g ne s'annule en aucun point de J. Il en résulte que τ ne s'annule en aucun point de J. On a donc, par la définition de σ en deux cas : $\forall\, s \in J,\ \ \sigma(s) = \dfrac{1}{\tau(s)}$.

D'autre part, comme l'application $(s,t) \longmapsto g'(st)$ est de classe C^∞ sur $J\times[0\,;1]$, d'après un théorème de dérivation sous le signe intégrale, τ est de classe C^∞ sur J.

On conclut que σ est de classe C^∞ sur J.

4) Puisque g est de classe C^∞ sur J et que g' ne s'annule en aucun point de J, d'après un théorème du cours, g réalise une bijection de J sur l'intervalle $g(J)$, et la bijection réciproque, notée h, est de classe C^∞ sur $g(J)$.

5) a) On a, pour x voisin de 0 :

$$y=\varphi(x,0) \iff F(x,0,y)=0 \iff 0-y+x\sigma(y)=0 \iff x\sigma(y)=y \iff x=g(y) \iff y=h(x).$$

On conclut que, pour tout x voisin de 0, on a $\varphi(x,0)=h(x)$.

5) b) et **6)** D'après 2)c), pour $t=0$, on a : $\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,0) = \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}(\sigma^n f')(0)$.

D'autre part, pour tout x : $u(x,0)=(f\circ h)(x)$, donc : $\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,0) = \dfrac{\mathrm{d}^n(f\circ h)}{\mathrm{d}x^n}(x)$,

et, en particulier : $\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,0) = \dfrac{\mathrm{d}^n(f\circ h)}{\mathrm{d}x^n}(0)$.

On conclut : $\dfrac{\mathrm{d}^n h}{\mathrm{d}x^n}(0) = \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}(\sigma^n f')}{\mathrm{d}x^{n-1}}(0)$.

En particulier, en prenant pour f l'application identité, on obtient : $\dfrac{\mathrm{d}_n h}{\mathrm{d}x^n}(0) = \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}(\sigma^n)}{\mathrm{d}x^{n-1}}(0)$.

IV. Application à la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$

1) L'application $\tau_p : x \longmapsto \dfrac{x}{(1+x)^{p+1}}$ est de classe C^∞ sur $]-1\,;+\infty[$, donc sur $\left[0\,;\dfrac{1}{p}\right]$.

On a, pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$:

$$\tau_p'(x) = (1+x)^{-p-1} - x(p+1)(1+x)^{-p-2} = (1+x)^{-p-2}\big((1+x)-(p+1)x\big) = \frac{1-px}{(1+x)^{p+2}},$$

d'où :
$$\forall\, x \in \left[0\,;\frac{1}{p}\right[,\ \ \tau_p'(x) > 0.$$

De plus :
$$\tau_p\Big(\frac{1}{p}\Big) = \frac{\dfrac{1}{p}}{\Big(1+\dfrac{1}{p}\Big)^{p+1}} = \frac{p^p}{(p+1)^{p+1}} = \rho_p.$$

On déduit, d'après le cours :

• τ_p réalise une bijection de $\left[0\,;\dfrac{1}{p}\right]$ sur $[0\,;\rho_p]$, et τ_p^{-1} est continue, donc τ_p réalise un homéomorphisme de $\left[0\,;\dfrac{1}{p}\right]$ sur $[0\,;\rho_p]$

• τ_p réalise une bijection de $\left[0\,;\dfrac{1}{p}\right[$ sur $[0\,;\rho_p[$ et τ_p^{-1} est de classe C^∞, donc τ_p réalise un C^∞-difféomorphisme de $\left[0\,;\dfrac{1}{p}\right[$ sur $[0\,;\rho_p[$.

2) On applique la formule de réversion de Lagrange en prenant $g = \tau_p$, ce qui est possible car τ_p est de classe C^∞ et $\tau_p(0) = 0$, $\tau_p'(0) = -1 \neq 0$.

On a donc : $$\frac{\mathrm{d}^n w_p}{\mathrm{d}x^n}(0) = \frac{\mathrm{d}^{n-1}(\sigma^n)}{\mathrm{d}x^{n-1}}(0).$$

Et : $$\sigma(s) = \frac{s}{\tau_p(s)} = (1+s)^{p+1}, \qquad \sigma^n(s) = (1+s)^{n(p+1)},$$

d'où, par récurrence immédiate :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{n-1}(\sigma^n)}{\mathrm{d}s^n}(s) &= \big(n(p+1)\big)\big(n(p+1)-1\big)\cdots\big(n(p+1)-n+2\big)(1+s)^{n(p+1)-n+1}\\ &= \frac{\big(n(p+1)\big)!}{\big(n(p+1)-(n-1)\big)!}(1+s)^{np+1} = (n-1)!\binom{n(p+1)}{n-1}(1+s)^{np+1},\end{aligned}$$

puis, en particulier : $$\frac{\mathrm{d}^{n-1}(\sigma^n)}{\mathrm{d}s^n}(0) = (n-1)!\binom{n(p+1)}{n-1}.$$

On a donc : $$\frac{w_p^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}(n-1)!\binom{n(p+1)}{n-1} = \frac{1}{n}\binom{n(p+1)}{n-1}.$$

3) a) Puisque $\beta > 1$, d'après l'exemple de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ est convergente.

3) b) Remarquons d'abord que, puisque $\alpha > 1$, il existe bien $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \beta < \alpha$, par exemple : $\beta = \dfrac{1+\alpha}{2}$.

On a : $$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

D'où : $$\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(1-\frac{\alpha}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right) - \left(1-\frac{\beta}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right) = \frac{\beta-\alpha}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Comme $\beta - \alpha < 0$, il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall\, n \geqslant N,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} - \dfrac{b_{n+1}}{b_n} < 0$.

On a ainsi, pour tout $n \geqslant N+1$: $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant \dfrac{b_n}{b_{n-1}}, \ldots, \dfrac{a_{N+1}}{a_N} \leqslant \dfrac{b_{N+1}}{b_N}$,

d'où, en multipliant membre à membre, puis en simplifiant, par télescopage : $\dfrac{a_n}{a_N} \leqslant \dfrac{b_n}{b_N}$, donc : $a_n \leqslant \dfrac{a_N}{b_N} b_n$.

Puisque la série $\sum\limits_n b_n$ converge, par théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série $\sum\limits_n a_n$ converge.

4) D'après le cours sur les séries entières, la série entière proposée converge (absolument) sur $]-\rho_p\,;\rho_p[$.

Il reste à montrer la convergence en $-\rho_p$ et en ρ_p. À cet effet, on va montrer l'absolue convergence en $-\rho_p$ et en ρ_p, ce qui revient à la convergence en ρ_p car les coefficients de cette série entière sont tous $\geqslant 0$.

En notant $a_n = \dfrac{1}{2n}\dbinom{n(p+1)}{n-1}\rho_p^n$, on a $a_n > 0$ et, en utilisant les $s_{p,n}$ introduits dans la solution de II 1), on a : $a_n = s_{p,n}\rho_p^n$, d'où :

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{s_{p,n+1}}{s_{p,n}}\rho_p = \frac{1}{n+1}\frac{(np+n+p+1)\cdots(np+n+1)}{(np+p+1)\cdots(np+2)}\rho_p \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{(np+n)^{p+1}\Big[\Big(1+\dfrac{p+1}{(p+1)n}\Big)\cdots\Big(1+\dfrac{1}{(p+1)n}\Big)\Big]}{(np)^p\Big[\Big(1+\dfrac{p+1}{pn}\Big)\cdots\Big(1+\dfrac{2}{pn}\Big)\Big]}\frac{p^p}{(p+1)^{p+1}} \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{n^{p+1}(p+1)^{p+1}\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)\Big[\Big(1+\dfrac{1}{(p+1)n}\Big)\cdots\Big(1+\dfrac{1}{(p+1)n}\Big)\Big]}{n^p p^p\Big[\Big(1+\dfrac{p+1}{pn}\Big)\cdots\Big(1+\dfrac{2}{pn}\Big)\Big]}\frac{p^p}{(p+1)^{p+1}} \\
&= \prod_{k=1}^{p}\frac{1+\dfrac{k}{(p+1)n}}{1+\dfrac{k+1}{pn}} = \Big[\prod_{k=1}^{p}\Big(1+\frac{k}{p+1}\frac{1}{n}\Big)\Big]\Big[\prod_{k=1}^{p}\Big(1+\frac{k+1}{p}\frac{1}{n}\Big)\Big]^{-1} \\
&= \Big[\prod_{k=1}^{p}\Big(1+\frac{k}{p+1}\frac{1}{n}\Big)\Big]\prod_{k=1}^{p}\Big[1-\frac{k+1}{p}\frac{1}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big] \\
&= 1+\underbrace{\Big(\sum_{k=1}^{p}\frac{k}{p+1}-\sum_{k=1}^{p}\frac{k+1}{p}\Big)}_{\text{notée } -\alpha}\frac{1}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big).
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\alpha = -\sum_{k=1}^{p}\frac{k}{p+1}+\sum_{k=1}^{p}\frac{k+1}{p} &= -\sum_{k=1}^{p}\frac{k}{p+1}+\sum_{k=1}^{p}\frac{k}{p}+p\cdot\frac{1}{p} \\
&= \sum_{k=1}^{p}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\Big)k+1 = \frac{1}{p(p+1)}\sum_{k=1}^{p}k+1 = \frac{1}{p(p+1)}\frac{p(p+1}{2}+1 = \frac{3}{2} > 1.
\end{aligned}$$

D'après 3)b), on conclut que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

Finalement, la série entière envisagée converge sur $[-\rho_p\,;\rho_p]$.

5) a) D'après 2) : $$\forall\, n \geqslant 1,\quad \frac{w_p^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n}\binom{n(p+1)}{n-1}.$$

D'après la définition de S_p et le lien entre coefficients d'un développement en série entière et dérivées successives en 0 de la fonction développée, on a : $\forall\, n \geqslant 1,\quad \dfrac{2S_p^{(n)}(0)}{n!} = 2\dfrac{1}{2n}\dbinom{n(p+1)}{n-1}$.

On a donc : $$\forall\, n \geqslant 1,\quad \frac{w_p^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(2S_p)^{(n)}(0)}{n!}.$$

De plus, l'égalité est aussi vraie pour $n = 0$, car $w_p(0) = 0$ et $S_p(0) = 0$.

On a donc : $$\forall n \in \mathbb{N},\quad \frac{w_p^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(2S_p)^{(n)}(0)}{n!}.$$

Ainsi, w_p et $2S_p$ ont le même (partie régulière du) développement limité à tout ordre en 0 (ces développements limités en 0 existent car ces deux fonctions sont de classe C^∞ sur un voisinage de 0).

Par opérations sur les développements limités (produit, combinaison linéaire), il en résulte que les deux fonctions
$$x \longmapsto 2S_p(x) - x\big(1 + 2S_p(x)\big)^{p+1} \quad \text{et} \quad x \longmapsto w_p(x) - x\big(1 + w_p(x)\big)^{p+1}$$
ont le même (partie régulière du) développement limité en 0 à tout ordre.

5) b) Par définition de w_p comme réciproque de τ_p, on a : $\forall x \in [0\,;\rho_p],\quad x = \dfrac{w_p(x)}{\big(1 + w_p(x)\big)^{p+1}}$

donc : $$\forall x \in [0\,;\rho_p],\quad w_p(x) - x\big(1 + w_p(x)\big)^{p+1} = 0.$$

Ainsi, la partie régulière du développement limité à l'ordre n en 0 de $x \longmapsto w_p(x) - x\big(1 + w_p(x)\big)^{p+1}$ est nulle, donc, d'après a), il en est de même pour $x \longmapsto 2S_p(x) - x\big(1 + 2S_p(x)\big)^{p+1}$.

Mais, comme S_p est développable en série entière en 0 de rayon $\geqslant \rho_p$, par opérations (produit, combinaison linéaire), l'application $x \longmapsto 2S_p(x) - x\big(1 + 2S_p(x)\big)^{p+1}$ est développable en série entière en 0, et son rayon est $\geqslant \rho_p$. Comme les coefficients de ce développement en série entière sont aussi les coefficients du développement limité en 0 à tout ordre, il s'ensuit que les coefficients de ce développement en série entière sont tous nuls, et, par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, on conclut :
$$\forall x \in [0\,;\rho_p[,\quad 2S_p(x) - x\big(1 + 2S_p(x)\big)^{p+1} = 0.$$

Enfin, puisque la série entière donnant S_p converge en ρ_p, d'après un théorème du cours, S_p est continue en ρ_p, donc le résultat précédent est aussi valable en ρ_p, d'où :
$$\forall x \in [0\,;\rho_p],\quad 2S_p(x) - x\big(1 + 2S_p(x)\big)^{p+1} = 0.$$

5) c) On a donc : $$\forall x \in [0\,;\rho_p],\quad \tau_p\big(2S_p(x)\big) = \frac{2S_p(x)}{\big(1 + 2S_p(x)\big)^{p+1}} = x = \tau_p\big(w_p(x)\big).$$

Comme τ_p est injective (sur $[0\,;\rho_p]$), on déduit : $\forall x \in [0\,;\rho_p],\quad w_p(x) = 2S_p(x)$.

6) a) D'après I 7) et 8), on a : $$\frac{1}{2} \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2p},$$

donc, comme $v_p = 2u_p - 1$, on a : $0 \leqslant v_p \leqslant \dfrac{1}{p}$, c'est-à-dire : $v_p \in \left[0\,;\dfrac{1}{p}\right]$.

6) b) • D'après 6)a), $\tau_p(v_p)$ existe, et on a : $\tau_p(v_p) = \dfrac{v_p}{(1 + v_p)^{p+1}} = \dfrac{2u_p - 1}{(2u_p)^{p+1}} = \dfrac{2u_p - 1}{u_p^{p+1}}\,\dfrac{1}{2^{p+1}} = \dfrac{1}{2^{p+1}}$,

car $u_p^{p+1} = 2u_p - 1$, cf. I 3).

D'où :
$$v_p = w_p\Big(\frac{1}{2^{p+1}}\Big) = 2S_p\Big(\frac{1}{2^{p+1}}\Big) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n}\binom{n(p+1)}{n-1}\Big(\frac{1}{2^{p+1}}\Big)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^{n(p+1)}}\binom{n(p+1)}{n-1},$$

et enfin, comme $v_p = 2u_p - 1$, on conclut : $u_p = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^{n(p+1)+1}}\binom{n(p+1)}{n-1}$,

ce qui montre la relation (T_p) de la partie II.

* *