Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

pour mercredi 6 septembre 2006

Exercices faciles d'entraînement

Thème : Intégrales, séries

1 Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$.

2 Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Indication : utiliser le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$.

3 Déterminer $\displaystyle\lim_{n\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$, en utilisant le théorème de convergence dominée.

4 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n - \mathrm{e}$.

5 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

6 Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+3)}$ converge et calculer sa somme.

7 Étudier les convergences (simple, uniforme, normale) de la série d'applications $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$, où, pour tout $n \geqslant 0$:

$$f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

8 Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$, de la variable réelle x, où, pour tout $n \geqslant 1$: $a_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$.

9 On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que f est développable en série entière en 0, de rayon infini, et calculer les coefficients de ce développement en série entière.

b) En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f^{(8)}(0)$?

* *