Corrigé de l'épreuve d'Analyse du Concours 2005

Jean-Marie Monier

Questions préliminaires

1. Soit $x = (x_k)_{k \geqslant 0} \in E$. Notons $y = \mathcal{T}x = (y_k)_{k \geqslant 0}$. On a :

$$\forall\, k \geqslant 0, \quad |y_k| = \Big| \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} x_j \Big| \leqslant \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} |x_j| \leqslant \frac{1}{k+1}(k+1)||x|| = ||x||,$$

et donc : $y \in E$ et $||y|| \leqslant ||x||$.
Ceci montre que E est stable par $\mathcal{T}$ et que : $\quad \forall\, x \in E, \quad ||\mathcal{T}x|| \leqslant ||x||$.

On note $T : E \longrightarrow E$ l'endomorphisme induit par $\mathcal{T}$ sur E.

2. Puisque $\mathcal{T}$ est linéaire, que E est un $\mathbb{C}$-sev de $\mathcal{E}$, et que E est stable par $\mathcal{T}$, T est linéaire.
D'après le résultat de 1., T est continue. De plus, $|||T||| \leqslant 1$.

3. Soit $x = (x_k)_{k \geqslant 0} \in E_c$. Il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $x_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} \ell$.
On a donc $x_k - \ell = \underset{k\infty}{o}(1)$.
Comme la série de terme général 1 est divergente et à termes réels $\geqslant 0$, d'après un théorème de sommation des relations de comparaison, on a :

$$\sum_{j=0}^{k}(x_j - \ell) = \underset{k\infty}{o}\Big(\sum_{j=0}^{k} 1\Big) = \underset{k\infty}{o}(k+1),$$

d'où :

$$y_k - \ell = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k}(x_j - \ell) = \underset{k\infty}{o}(1),$$

c'est-à-dire : $y_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Ceci montre :

$$\forall\, x \in E_c, \quad Tx \in E_c,$$

c'est-à-dire que E_c est stable par T.
Plus précisément, on a montré que, pour toute $x \in E$, si x converge vers ℓ, alors Tx converge vers ℓ.

Partie I : Exemples

A. Premiers exemples

1. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})y_k = \frac{1}{k+1}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \cdots + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}) = \frac{1}{k+1}\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)\theta}\big).$$

Si $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$, alors :

$$|y_k| = \frac{1}{k+1}\left|\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right| \leqslant \frac{1}{k+1}\frac{2}{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|} \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc y converge vers 0.

Si $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = 1$, donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y_k = 1$, et donc y converge vers 1.

On conclut : $\quad y \in E_c$.

2.(a) Soient $p \geqslant 0$, $0 \leqslant j < n$. On a :

$$y_{pn+j} = \frac{1}{pn+j+1}\sum_{q=0}^{pn+j} x_q = \frac{1}{pn+j+1}(p+1).$$

2.(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Par division euclidienne de k par n, il existe $(p,j) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $k = pn+j$ et $0 \leqslant j < n$. On a, d'après (a) :

$$\left|y_{pn+j} - \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{p+1}{pn+j+1} - \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{n-j-1}{(pn+j+1)n}\right| = \frac{n-j-1}{(pn+j+1)n} \leqslant \frac{n}{(pn+j+1)n} \leqslant \frac{1}{pn+j} = \frac{1}{k}.$$

Il en résulte $y_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $y \in E_c$.

3. D'après la 3ème question préliminaire, si x converge, alors Tx converge. D'après l'exemple précédent, il se peut que : x diverge et Tx converge.

L'exemple précédent montre que la réciproque de la 3ème question préliminaire est fausse.

4.(a) i. On suppose $t \neq t_0$. Raisonnons par l'absurde, supposons $x(t)$ convergente. Notons ℓ la limite de $x(t)$.

Puisque :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1}(t) = \big(x_k(t)-1\big)^2,$$

on a, par passage à la limite, $\ell = (\ell-1)^2$, d'où $\ell = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Mais les $x_k(t)$ sont tous dans $[0\,;1]$, donc $\ell \in [0\,;1]$, puis, comme $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$, on déduit $\ell = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = t_0$.

4.(a) ii. On suppose ici $t \neq t_0$.

• On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$x_{k+1}(t) - t_0 = \big(x_k(t)-1\big)^2 - (t_0-1)^2 = \big(x_k(t)-t_0\big)\Big(\big(x_k(t)-1\big) + (t_0-1)\Big).$$

Comme $x_k(t) - 1 \leqslant 0$ et $t_0 - 1 < 0$, il s'ensuit :

$$x_{k+1}(t) = t_0 \iff x_k(t) = t_0.$$

Mais $x_0(t) = t \neq t_0$, donc, de proche en proche : $\quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_k(t) \neq t_0$.

• On suppose que $x(t)$ converge. D'après i., $x(t)$ converge vers t_0.

D'autre part, comme les $x_k(t) - t_0$ sont tous non nuls, on peut former des quotients :

$$\frac{x_{k+1}(t)-t_0}{x_k(t)-t_0} = \big(x_k(t)-1\big) + (t_0-1) \underset{k\infty}{\longrightarrow} 2(t_0-1).$$

4.(a) iii. Mais : $\quad |2(t_0-1)| = \left|2\Big(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}-1\Big)\right| = |1-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-1 > 1.$

Puisque $\dfrac{x_{k+1}(t)-t_0}{x_k(t)-t_0} \underset{k\infty}{\longrightarrow} 2(t_0-1)$, on a, à partir d'un certain indice N :

$$\left|\frac{x_{k+1}(t)-t_0}{x_k(t)-t_0}\right| > 1,$$

et donc $|x_{k+1}(t)-t_0| > |x_k(t)-t_0|$. Il en résulte que la suite $\big(|x_k(t)-t_0|\big)_{n\geqslant N}$ est (strictement) croissante, d'où, pour tout $k \geqslant N$, $|x_k(t)-t_0| \geqslant |x_N(t)-t_0|$, qui est une contante >0, et donc $x_k(t)$ ne tend pas vers t_0 lorsque l'entier k tend vers l'infini, contradiction.

On conclut que, pour tout $t \neq t_0$, la suite $x(t)$ diverge.

4.(b) i. On a, pour tout $x \in [0\,;1]$:

$$g(x) = f\big(f(x)\big) = \big(f(x)-1\big)^2 = \big((x-1)^2-1\big)^2 = (x^2-2x)^2 = x^2(x-2)^2.$$

L'application g est dérivable et, pour tout $x \in [0\,;1]$:

$$g'(x) = 2x(x-2)(2x-2) = 4x(x-1)(x-2).$$

D'autre part, pour tout $x \in [0\,;1]$:

$$\begin{aligned} g(x)-x &= x^2(x-2)^2 - x = x\big(x(x-2)^2-1\big) = x(x^3-4x^2+4x-1) \\ &= x(x-1)(x^2-3x+1) = x(x-1)(x-t_0)(x-u_0), \end{aligned}$$

en notant $u_0 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} > 1.$

On dresse le tableau des variations de g, on trace la courbe représentative de g, et on a facilement la position relative de cette représentation graphique par rapport à la première bissectrice du repère.

On a, pour tout $t \in [0\,;1]$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$x_{k+2}(t) = f\Big(f\big(x_k(t)\big)\Big) = g\big(x_k(t)\big),$$

donc :

$$x_{2k+1}(t) = g\big(x_{2k-1}(t)\big) \quad \text{et} \quad x_{2k+2}(t) = g\big(x_{2k}(t)\big).$$

Tableau de variations et courbe représentative

4.(b) ii. • D'après le graphique (l'énoncé dit qu'on peut se contenter d'une argumentation fondée sur le graphique) :

si $0 \leqslant t < t_0$, la suite $\big(x_{2k}(t)\big)_{k\geqslant 0}$ est décroissante et de limite 0, et, comme $t_0 < x_1(t) \leqslant 1$, la suite $\big(x_{2k+1}(t)\big)_{k\geqslant 0}$ est croissante et de limite 1

si $t = t_0$, les suites $\big(x_{2k}(t)\big)_{k\geqslant 0}$ et $\big(x_{2k+1}(t)\big)_{k\geqslant 0}$ sont constantes égales à t_0

si $t_0 < t \leqslant 1$, la suite $\big(x_{2k}(t)\big)_{k\geqslant 0}$ est croissante et de limite 1 et la suite $\big(x_{2k+1}(t)\big)_{k\geqslant 0}$ est décroissante et de limite 0.

Les suites extraites $\big(x_{2k}(t)\big)_{k\geqslant 0}$ et $\big(x_{2k+1}(t)\big)_{k\geqslant 0}$ sont donc convergentes.

• Comme $y_k(t) = \dfrac{1}{k+1}\big(x_0(t) + \cdots + x_k(t)\big)$, on voit en groupant les termes deux par deux et en séparant en deux cas suivant la parité de k, que $y_k(t) \underset{k\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$.

On conclut que $y(t)$ converge et que sa limite est : $\dfrac{1}{2}$ si $t \neq t_0$, et t_0 si $t = t_0$.

4.(b) iii. Chaque $y_k : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue (car polynomiale) et la suite $(y_k)_{k\geqslant 0}$ converge simplement vers l'application $z : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vaut t_0 en t_0 et $\dfrac{1}{2}$ ailleurs. Si la suite $(y_k)_{k\geqslant 0}$ convergeait uniformément sur $[0\,;1]$, d'après un théorème du Cours, z serait continue sur $[0\,;1]$, ce qui n'est pas, puisque z est discontinue en t_0.

On conclut que la suite $(y_k)_{k\geqslant 0}$ ne converge pas uniformément sur $[0\,;1]$.

B. Une remarque

1. On a, pour tout $k \geqslant 1$:

$$|y_k - y_{k-1}| = \left|\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} x_j - \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} x_j\right| = \frac{1}{k(k+1)}\left|k\sum_{j=0}^{k} x_j - (k+1)\sum_{j=0}^{k-1} x_j\right| = \frac{1}{k(k+1)}\left|kx_k - \sum_{j=0}^{k-1} x_j\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{k(k+1)}\Big(k|x_k| + \sum_{j=0}^{k-1}|x_j|\Big) \leqslant \frac{1}{(k(k+1)}2k||x|| = \frac{2||x||}{k+1}.$$

2. Question classique, mais difficile

D'après 1., on a : $y_k - y_{k-1} \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0$.

Notons V l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(y_k)_{k\geqslant 0}$.
Soient $(\alpha, \beta) \in V^2$ tel que $\alpha < \beta$, $\gamma \in \,]\alpha\,;\beta[$.

Soient $\varepsilon > 0$, $k_0 \in \mathbb{N}$.

Puisque $y_k - y_{k-1} \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que $k_1 > k_0$ et :

$$\forall\, k \geqslant k_1, \quad |y_k - y_{k-1}| \leqslant \varepsilon.$$

Comme $\alpha \in V$, il existe $k_2 > k_1$ tel que : $|y_{k_2} - \alpha| \leqslant \varepsilon$.
Puis, comme $\beta \in V$, il existe $k_3 > k_2$ tel que : $|y_{k_3} - \beta| \leqslant \varepsilon$.

L'ensemble $\big\{k \in \{k_2, ..., k_3\},\ y_k \leqslant \gamma + \varepsilon\big\}$ est non vide (il contient k_2), fini, inclus dans $\mathbb{N}$, donc il admet un plus grand élément noté k_4.

On a déjà $y_4 \leqslant \gamma + \varepsilon$.
Si $k_4 = k_3$, alors $y_{k_4} = y_{k_3} \geqslant \beta - \varepsilon \geqslant \gamma - \varepsilon$.
Si $k_4 < k_3$, alors, par définition de k_4, $y_{k_4+1} \geqslant \gamma + \varepsilon$, donc $y_{k_4} \geqslant y_{k_4+1} - \varepsilon \geqslant \gamma$.

Ceci montre :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall k_0 \in \mathbb{N},\ \exists k \geqslant k_0,\quad \gamma - \varepsilon \leqslant y_k \leqslant \gamma + \varepsilon,$$

donc γ est valeur d'adhérence de la suite $(y_k)_{k \geqslant 0}$, $\gamma \in V$.

On a montré que, pour tout $(\alpha, \beta) \in V^2$ tel que $\alpha < \beta$, on a $[\alpha\,;\beta] \subset V$, donc V est un intervalle.

C. Suites à valeurs dans $\{0, 1\}$

1. • On a :

$$|u_p - p!| = 1! + 2! + \cdots (p-1)! = \Big(1! + 2! + \cdots + (p-2)!\Big) + (p-1)! \leqslant (p-1)(p-2)! + (p-1)! = 2(p-1)! = \frac{2}{p} p!.$$

Il en résulte $u_p - p! = o(p!)$, et donc : $u_p \underset{p\infty}{\sim} p!$.

• De même, et plus simplement :

$$\big|v_p - (2p-1)!\big| = 1! + 3! + \cdots + (2p-3)! \leqslant (p-1)(2p-3)! = \frac{1}{2(2p-1)}(2p-1)! = o\big((2p-1!\big),$$

donc : $v_p \underset{p\infty}{\sim} (2p-1)!$.

2. Il est clair que :

si p est pair, $p = 2q$, $q \in \mathbb{N}$, on a $y_k = \dfrac{1}{u_{2q}} \displaystyle\sum_{j=0}^{u_{2q}} x_j = \dfrac{v_q}{u_{2q}}$

si p est impair, $p = 2q+1$, $q \in \mathbb{N}$, on a $y_k = \dfrac{1}{u_{2q+1}} \displaystyle\sum_{j=0}^{u_{2q+1}} x_j = \dfrac{v_q}{u_{2q+1}}$.

3. D'après 2. :

$$y_{u_{2q}} = \frac{v_q}{u_{2q+1}} \underset{q\infty}{\sim} \frac{(2q-1)!}{(2q+1)!} = \frac{1}{2q} \underset{q\infty}{\longrightarrow} 0$$

et

$$y_{u_{2q+1}} = \frac{v_{q+1}}{u_{2q+1}+1} \underset{q\infty}{\sim} \frac{(2q+1)!}{(2q+1)!} \underset{q\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi, y est une suite à valeurs réelles dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est un intervalle (cf. B.2.), contenant 0 et 1, donc contenant $[0\,;1]$. Comme d'autre part, d'après A.1., $||y|| \leqslant ||x|| = 1$, les y_k sont tous dans $[0\,;1]$, donc l'ensemble des valeurs d'adhérence est inclus dans $[0\,;1]$.
Finalement, l'ensemble des valeurs d'adhérence de y est $[0\,;1]$.

Puisque les x_k sont tous dans le fermé $\{0, 1\}$, les valeurs d'adhérence de x sont toutes dans $\{0, 1\}$.
D'autre part, comme x prend une infinité de fois la valeur 0 et une infinité de fois la valeur 1,
0 et 1 sont valeurs d'ahérence de x.
Finalement, l'ensemble des valeurs d'adhérence de x est $\{0, 1\}$.

On remarque que, dans cet exemple, l'ensemble des valeurs d'adhérence de y est considérablement plus « grand » que celui de x.

4.(a) On a, pour tout $k \geqslant 0$ et tout $p \geqslant 0$, puisque les X_k sont indépendantes :

$$p\big(X_k = X_{k+1} = ... = X_{k+p} = 0\big) = p(X_k = 0)\cdots p(X_{k+p} = 0) = \Big(\frac{1}{2}\Big)^{p+1},$$

d'où, puisque les événements $(X_k = 0) \cap \cdots \cap (X_{k+p}0)$, $p \geqslant 0$ forment une suite décroissante :

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\quad p\big(\forall\, j \geqslant k,\quad X_j = 0\big) \leqslant p(X_k = ... = X_{k+p} = 0) = \Big(\frac{1}{2}\Big)^{p+1},$$

et donc :
$$p\big(\forall\, j \geqslant k,\quad X_j = 0\big) = 0.$$

4.(b) Soit $\omega \in \Omega$. Notons $S_c = \big\{\omega \in \Omega\,;\, \big(X_k(\omega)\big)_{k\geqslant 0} \in E_c\big\}$.

Il est clair qu'une suite à termes dans $\{0, 1\}$ converge si et seulement si elle est stationnaire sur la valeur 0 ou la valeur 1. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$S_k(0) = \big\{\omega \in \Omega\,;\, \forall\, j \geqslant k,\quad X_j(\omega) = 0\big\} \qquad \text{et} \qquad S_k(1) = \big\{\omega \in \Omega\,;\, \forall\, j \geqslant k,\quad X_j(\omega) = 1\big\}.$$

On a alors $S_c = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k$ où on a noté, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S_k = S_k(0) \cup S_k(1)$.

D'après *a)*, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p\big(\forall\, j \geqslant k,\quad X_j = 0\big\} = 0$ et, de même, $p\big(\forall\, j \geqslant k,\quad X_j = 1\big\} = 0$.

Par sous-additivité dénombrable, on déduit :

$$p(S_c) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} p(S_k) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(p\big(S_k(0)\big) + p\big(S_k(1)\big)\Big) = 0,$$

et donc : $p(S_c) = 0$.

Il en résulte que la probabilité pour que la suite $(X_k)_{k\geqslant 0}$ converge (simplement, non précisé dans l'énoncé) est nulle, et donc la suite $(X_k)_{k\geqslant 0}$ diverge presque sûrement.

4.(c) D'après la loi forte des grands nombres, la suite $(Y_k)_{k\geqslant 0}$ converge presque sûrement vers $\dfrac{1}{2}$, espérance commune des variables aléatoires indépendantes X_k.

Partie II : Étude de l'endomorphisme T

A. Généralités

1. Soient $x = (x_k)_{k\geqslant 0}$, $y = (y_k)_{k\geqslant 0} \in \mathcal{E}$. on a :

$$y = \mathcal{T}x \iff \begin{cases} y_0 = x_0 \\ 2y_1 = x_0 + x_1 \\ \quad\vdots \\ (k+1)y_{k+1} = x_0 + x_1 + \cdots + x_k \\ \quad\vdots \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y_0 = x_0 \\ 2y_1 = y_0 + x_1 \\ \quad\vdots \\ (k+1)y_k = ky_{k-1} + x_k \\ \quad\vdots \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_1 = 2y_1 - y_0 \\ \quad\vdots \\ x_k = (k+1)y_k - ky_{k-1} \\ \quad\vdots \end{cases}$$

Ceci montre que, pour tout $y \in \mathcal{E}$, il existe $x \in \mathcal{E}$ unique tel que $y = \mathcal{T}x$, et donc $\mathcal{T}$ est une bijection de $\mathcal{E}$ sur lui-même.

De plus, l'application réciproque est l'application qui, à chaque $y = (y_k)_{k\geqslant 0} \in \mathcal{E}$ associe $x = (x_k)_{k\geqslant 0}$ défini par :

$$x_0 = y_0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \geqslant 1,\quad x_k = (k+1)y_k - ky_{k-1}.$$

2.(a) Soit $\lambda \in \mathbb{C} - \mathcal{A}$.

On a, pour tous $x = (x_k)_{k\geqslant 0}$, $y = (y_k)_{k\geqslant 0} \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} y = (\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{E}})(x) &\iff y = \mathcal{T}x - \lambda x \iff \forall\, k \in \mathbb{N},\quad y_k = \frac{1}{k+1}(x_0 + \cdots + x_k) - \lambda x_k \\ &\iff \forall\, k \in \mathbb{N},\quad \big(1 - \lambda(k+1)\big)x_k = (k+1)y_k - \sum_{0\leqslant j<k} x_j. \end{aligned}$$

Comme $1 - \lambda(k+1) \neq 0$, il existe $x_0, x_1, ...$ convenant et unique (de proche en proche).

Ceci montre que, si $\lambda \notin \mathcal{A}$, alors $\mathcal{T} - \lambda\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ est bijective.

2.(b) Soit $\lambda \in \mathcal{A}$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = \dfrac{1}{p+1}$.

Soit $(x, y) \in \mathcal{E}^2$. On a, comme en (a) :

$$\begin{aligned} y = (\mathcal{T} - \lambda\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})(x) &\iff \forall\, k \in \mathbb{N},\quad \big(1 - \lambda(k+1)\big)x_k = (k+1)y_k - \sum_{0\leqslant j<k} x_j \\ &\iff \begin{cases} y_0 = x_0 \\ \forall\, k \geqslant 1,\quad \big(1 - \lambda(k+1)\big) = (k+1)y_k - ky_{k-1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Pour $k = p$, apparaît la condition $0 = (p+1)y_p - py_{p-1}$.

- Il existe $y \in \mathcal{E}$ telle que $(p+1)y_p - py_{p-1} \neq 0$, par exemple la suite $y = (y_k)_{k\geqslant 0}$ définie par :

$$\begin{cases} \forall\, k \neq p, \quad y_k = 0 \\ y_p = 1. \end{cases}$$

Il en résulte que $\mathcal{T} - \lambda\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ n'est pas surjective.

- Considérons la suite x définie par : $\quad x_k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq p \\ 1 & \text{si} \quad k = p. \end{cases}$

On a alors $(\mathcal{T} - \lambda\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})(x) = 0$ et $x \neq 0$, donc l'application linéaire $\mathcal{T} - \lambda\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ n'est pas injective.

3. Soit $y = (y_k)_{k\geqslant 0} \in \mathcal{E}$.

Puisque $\mathcal{T}$ est bijective, il existe $x = \mathcal{T}^{-1}y$ et on a : $\quad \forall\, k \geqslant 1,\quad x_k = (k+1)y_k - ky_{k-1}$.

Alors :

$$y \in \mathrm{Im}\,(T) \iff x \in E \iff (x_k)_{k\geqslant 0} \text{ bornée} \iff \exists K > 0,\ \forall\, k \geqslant 1,\quad \big|(k+1)y_k - ky_{k-1}\big| \leqslant K.$$

4. • Puisque $\mathcal{T}$ est injective, sa restriction T à E est aussi injective.

- Considérons la suite réelle $y = (y_k)_{k\geqslant 0}$ définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N},\quad y_k = (-1)^k$.

Alors $y \in E$ mais $y \notin \mathrm{Im}\,(T)$ car, pour tout $k \geqslant 1$:

$$\big|(k+1)y_k - ky_{k-1}\big| = \big|(k+1)(-1)^k - k(-1)^{k-1}\big| = |(k+1) + k| = 2k + 1,$$

et la suite de terme général $2k + 1$ n'est pas bornée, et on utilise le résultat de 3.

On conclut : T n'est pas surjective.

B. Quelques suites auxiliaires

1. Remarquons d'abord que, pour tout $k \geqslant 1$, $1 + \left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right)\dfrac{1}{k}$ existe et est $\neq 0$.

En effet, $\lambda \neq 0$ et $k \neq 0$, et on a :

$$1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{k} = 0 \iff \lambda k + \lambda - 1 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{k+1}.$$

Comme $\lambda \notin \mathcal{A}$, on a $\lambda \neq \dfrac{1}{k+1}$, et donc $1 + \left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right)\dfrac{1}{k} \neq 0$.

On a $\alpha_0 = \dfrac{1}{1-\lambda}$ qui existe car $\lambda \neq 1$ et est non nul, donc, par la formule de définition des α_k, comme le coefficient $\dfrac{1}{1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{k}}$ est $\neq 0$, les α_k sont tous non nuls.

2. On a :

$$\begin{aligned}
\ln|\alpha_k| - \ln|\alpha_{k-1}| &= -\ln\left|1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{k}\right| = -\ln\left|1 + (a + \mathrm{i}b)\frac{1}{k}\right| = -\ln\left|1 + \frac{a}{k} + \mathrm{i}\frac{b}{k}\right| \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left(\left(1 + \frac{a}{k}\right)^2 + \left(\frac{b}{k}\right)^2\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{2a}{k} + \frac{a^2+b^2}{k^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{2a}{k} + \underset{k\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = -\frac{a}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).
\end{aligned}$$

3. On suppose ici $a < 0$.

On a $\ln|\alpha_k| - \ln|\alpha_{k-1}| \underset{k\infty}{\sim} -\dfrac{a}{k} > 0$, et la série de terme général $-\dfrac{a}{k}$ diverge, donc, par théorème d'équivalence pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, la série de terme général $\ln|\alpha_k| - \ln|\alpha_{k-1}|$ diverge. De plus, notre série est à termes réels $\geqslant 0$ à partir d'un certain rang et divergente, donc ses sommes partielles tendent vers $+\infty$. Ainsi, $\ln|\alpha_k| \underset{k\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc : $|\alpha_k| \underset{k\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

4. On suppose ici $a \geqslant 0$.

Notons, pour $k \geqslant 0$: $\beta_k = k^a|\alpha_k|$, et, pour $k \geqslant 1$: $v_k = \ln\beta_k - \ln\beta_{k-1}$.
On a :

$$\begin{aligned}
v_k &= \ln\left(k^a|\alpha_k|\right) - \ln\left((k-1)^a|\alpha_{k-1}|\right) = a\ln k + \ln|\alpha_k| - a\ln(k-1) - \ln|\alpha_{k-1}| \\
&= \ln|\alpha_k| - \ln|\alpha_{k-1}| - a\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \left(-\frac{a}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) - a\left(-\frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{k^2}\right).
\end{aligned}$$

Comme la série de terme général $O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ est absolument convergente, donc convergente, la série de terme général v_k converge. D'après le lien suite/série, il en résulte que la suite de terme général $\ln\beta_k$ converge, vers un réel noté ℓ. On a donc $\ln\beta_k = \ell + o(1)$, d'où $a\ln k + \ln|\alpha_k| = \ell + o(1)$, puis $\ln|\alpha_k| = -a\ln k + \ell + o(1)$, et donc :

$$|\alpha_k| = \exp\left(-a\ln k + \ell + o(1)\right) = \frac{\mathrm{e}^\ell}{k^a}\mathrm{e}^{o(1)} \underset{k\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^\ell}{k^a}.$$

En notant $A_1 = \mathrm{e}^\ell > 0$, on conclut : $|\alpha_k| \underset{k\infty}{\sim} \dfrac{A_1}{k^a}$.

5.(a) On a :
$$\frac{1}{k|\alpha_{k-1}|} \underset{k\infty}{\sim} \frac{(k-1)^a}{kA_1} \underset{k\infty}{\sim} \frac{k^{a-1}}{A_1} \geqslant 0.$$
Comme $a \geqslant 0$, la série de terme général $\dfrac{k^{a-1}}{A_1}$ diverge et est à termes réels $\geqslant 0$, donc, par théorème de sommation des relations de comparaison, on a :
$$U_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j|\alpha_{j-1}|} \underset{k\infty}{\sim} \sum_{j=1}^{k} \frac{j^{a-1}}{A_1}.$$
D'autre part, par une classique comparaison somme-intégrale, on a :
$$\sum_{j=1}^{k} j^{a-1} \underset{k\infty}{\sim} \int_1^k t^{a-1}\,\mathrm{d}t = \frac{k^a-1}{a} \underset{k\infty}{\sim} \frac{k^a}{a}.$$
On obtient ainsi : $U_k \underset{k\infty}{\sim} \dfrac{k^a}{aA_1}$.

Il en résulte que la suite de terme général $\dfrac{U_k}{k^a}$ est convergente, donc bornée. Ceci montre qu'il existe $A_2 > 0$ tel que :
$$\forall\, k \geqslant 1, \quad 0 \leqslant U_k \leqslant A_2 k^a.$$

5.(b) On a vu $\alpha_k = O\Big(\dfrac{1}{k^a}\Big)$ et $U_k = O(k^a)$, d'où, par produit, $|\alpha_k U_k| = O(1)$, c'est-à-dire que la suite de terme général $|\alpha_k U_k|$ est bornée.
Il existe donc $A_3 \geqslant 0$ tel que :
$$\forall\, k \geqslant 1, \quad |\alpha_k U_k| \leqslant A_3.$$

6. On a, pour tout $j \geqslant 1$:
$$\frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_{j-1}} = \frac{1}{\alpha_{j-1}}\Big(\frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j} - 1\Big) = \frac{1}{\alpha_{j-1}}\Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big)\frac{1}{j} = \frac{a+\mathrm{i}b}{j\alpha_{j-1}},$$
puis, pour tout $k \geqslant 1$:
$$|\alpha_k| V_{k+1} = |\alpha_k| \sum_{j=1}^{k} \Big|\frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_{j-1}}\Big| = |\alpha_k| \sum_{j=1}^{k} \Big|\frac{a+\mathrm{i}b}{j\alpha_{j-1}}\Big| = |a+\mathrm{i}b|\,|\alpha_k|\,U_k \leqslant B_4,$$
en notant $B_4 = \sqrt{a^2+b^2}A_3 \geqslant 0$.
On a alors, en décalant d'un indice :
$$|\alpha_{k+1}| V_{k+1} = \frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_k|}|\alpha_k| V_k = \frac{1}{1 + \big(1 - \frac{1}{\lambda}\big)\frac{1}{k+1}}|\alpha_k| V_k.$$
Comme le coefficient tend vers 1 lorsque k tend vers $+\infty$, il existe $A_4 \geqslant 0$ tel que :
$$\forall\, k \geqslant 1, \quad |\alpha_k| V_k \leqslant A_4.$$

C. Détermination du spectre de T

1. • T n'est pas surjective, donc n'est pas bijective, donc $0 \in \sigma(T)$.

• La suite constante égale à 1 est dans E, n'est pas la suite nulle, et est dans $\mathrm{Ker}\,(T - \mathrm{Id}_E)$, donc $T - \mathrm{Id}_E$ n'est pas injective, et donc $1 \in \sigma(T)$.

2. L'énoncé est ici confus, par confusion de $\mathcal{E}$ et E.

Soient $x, y \in \mathcal{E}$. On a :

$$(T - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) = y \iff \forall\, k \geqslant 0, \quad \frac{x_0 + \cdots + x_k}{k+1} - \lambda x_k = y_k$$

$$\iff \begin{cases} x_0 - \lambda x_0 = y_0 \\ \forall\, k \geqslant 1, \quad x_0 + \cdots + x_k = \lambda(k+1)x_k + (k+1)y_k \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{1-\lambda} y_0 \\ \forall\, k \geqslant 1, \quad x_k = \big(\lambda(k+1)x_k + (k+1)y_k\big) - (\lambda k x_{k-1} + k y_{k-1}). \end{cases}$$

Et :

$$x_k = \frac{1}{1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{k}} \Big(x_{k-1} + \frac{1}{\lambda}\Big(y_{k-1} - y_k - \frac{1}{k} y_k \Big) \iff \frac{\lambda k + \lambda - 1}{\lambda k} x_k = x_{k-1} + \frac{1}{\lambda} y_{k-1} - \frac{k+1}{\lambda k} y_k$$

$$\iff (\lambda k + \lambda - 1) x_k = \lambda k x_{k-1} + k y_{k-1} - (k+1) y_k \iff x_k = \frac{1}{1 - \lambda - \lambda k}\big(-\lambda k x_{k-1} - k y_{k-1} + (k+1) y_k \big),$$

d'où le résultat voulu.

3.(a) D'après les définitions et les notations précédentes, on a $x = \alpha$.

3.(b) • Si $\lambda \notin \mathcal{A}$, on a vu que $T - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas bijectif, donc $\lambda \in \sigma(T)$.

• Supposons $\lambda \notin \mathcal{A}$. Comme $a < 0$, d'après B.3., $|x_k| \underset{k\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $x \notin E$, et donc $\lambda \in \sigma(T)$.

4.(a) • D'après C.2., on a :

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad x_k = \frac{1}{1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{k}} \Big(x_{k-1} + \frac{1}{\lambda}\Big(y_{k-1} - y_k - \frac{1}{k} y_k \Big)\Big),$$

d'où, en divisant par α_k, qui est $\neq 0$:

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad \frac{x_k}{\alpha_k} = \frac{1}{\Big(1 + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big)\frac{1}{k}\Big)\alpha_k} \Big(x_{k-1} + \frac{1}{\lambda}\Big(y_{k-1} - y_k - \frac{1}{k} y_k \Big)\Big).$$

Mais, par définition des α_k, le coefficient initial ci-dessus est α_{k-1}, d'où :

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad \frac{x_k}{\alpha_k} = \frac{x_{k-1}}{\alpha_{k-1}} + \frac{1}{\lambda} \frac{y_{k-1} - y_k}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\lambda} \frac{y_k}{\alpha_{k-1}}.$$

En sommant la relation ci-dessus et par télescopage, on obtient :

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad \frac{x_k}{\alpha_k} = \frac{x_0}{\alpha_0} + \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{k}\frac{y_{j-1}-y_j}{\alpha_{j-1}} - \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{k}\frac{y_j}{j\alpha_{j-1}},$$

d'où, en multipliant par α_k et puisque $y_0 = \dfrac{x_0}{\alpha_0}$:

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad x_k = \alpha_k y_0 + \frac{\alpha_k}{\lambda}\sum_{j=1}^{k}\frac{y_{j-1}-y_j}{\alpha_{j-1}} - \frac{1}{\lambda}\Big(\sum_{j=1}^{k}\frac{y_j}{j\alpha_{j-1}}\Big)\alpha_k.$$

4.(b) • On a, pour tout $k \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}(y_{j-1}-y_j)\frac{1}{\alpha_{j-1}} &= \sum_{j=1}^{k}\frac{y_{j-1}}{\alpha_{j-1}} - \sum_{j=1}^{k}\frac{y_j}{\alpha_{j-1}} = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{y_j}{\alpha_j} - \sum_{j=1}^{k}\frac{y_j}{\alpha_{j-1}} \\ &= \sum_{j=1}^{k}\Big(\frac{y_j}{\alpha_j} - \frac{y_j}{\alpha_{j-1}}\Big) + \frac{y_0}{\alpha_0} - \frac{y_k}{\alpha_k} = \sum_{j=1}^{k} y_j\Big(\frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_{j-1}}\Big) + \frac{y_0}{\alpha_0} - \frac{y_k}{\alpha_k}.\end{aligned}$$

• On a donc, pour tout $k \geqslant 1$:

$$x_k = \alpha_k y_0 + \frac{\alpha_k}{\lambda}\Big(\sum_{j=1}^{k} y_j\Big(\frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_{j-1}}\Big) + \frac{y_0}{\alpha_0} - \frac{y_k}{\alpha_k}\Big) - \frac{\alpha_k}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{y_j}{k\alpha_{j-1}}.$$

d'où :

$$|x_k| \leqslant ||y||\frac{|\alpha_k|}{|\lambda|}\Big(|\lambda| + V_{k+1} + \frac{1}{|\alpha_0|} + \frac{1}{|\alpha_k|} + U_k\Big).$$

Comme $\dfrac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \underset{k\infty}{\longrightarrow} 1$, en utilisant les résultats des questions 4,5,6, on conclut à l'existence de $A_5 > 0$ tel que :

$$\forall\, k \geqslant 0, \quad |x_k| \leqslant A_5||y||.$$

5. On suppose ici (ce n'est pas clair dans l'énoncé) $a > 0$.

Avec les notations précédentes, $T - \lambda\mathrm{Id}_E$ est inversible, donc $\lambda \notin \sigma(T)$.

En notant $\lambda = x + \mathrm{i}y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$1 - \frac{1}{\lambda} = 1 - \frac{1}{x+\mathrm{i}y} = \frac{(x-1)+\mathrm{i}y}{x+\mathrm{i}y} = \frac{\big((x-1)+\mathrm{i}y\big)(x-\mathrm{i}y)}{x^2+y^2},$$

donc :

$$\mathrm{Ré}\Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big) < 0 \iff (x-1)x + y^2 < 0 \iff x^2 + y^2 - x < 0.$$

Notons Ω le disque ouvert de centre $\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$. On a donc :

$$\Omega \subset \sigma(T) \subset \overline{\Omega}.$$

Comme $\sigma(T)$ est fermé (admis), on conclut $\sigma(T) = \overline{\Omega}$, c'est-à-dire que $\sigma(T)$ est le disque fermé de centre $\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

Partie III : Propriétés régularisantes de T

A. Convergence simple

1. Il s'agit d'un exercice classique, mais difficile.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n - \ell$. On a donc : $b_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \alpha^j b_{n-j}$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \sum_{j=0}^{n} \alpha^j a_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \alpha^j (\ell + b_{n-j}) = \ell \sum_{j=0}^{n} \alpha^j + \sum_{j=0}^{n} \alpha^j b_{n-j} = \ell \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} + v_n.$$

Étudions donc la suite de terme général v_n.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (si $\alpha \neq 0$, le cas $\alpha = 0$ étant d'étude triviale) :

$$v_n = \sum_{j=0}^{n} \alpha^j b_{n-j} \underset{i=n-j}{=} \sum_{i=0}^{n} \alpha^{n-i} b_i = \alpha^n \sum_{i=0}^{n} b_i \alpha^{-i}.$$

Puisque $b_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, on a : $|b_n \alpha^{-n}| = o(|\alpha|^{-n})$. Comme $|\alpha| < 1$, la série géométrique (à termes réels : $\geqslant 0$) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} |\alpha|^{-n}$ diverge, donc, par théorème de sommation des relations de comparaison :

$$\sum_{i=0}^{n} |b_i \alpha^{-i}| = o\Big(\sum_{i=0}^{n} |\alpha|^{-i}\Big).$$

Mais :

$$\sum_{i=0}^{n} |\alpha|^{-i} = \frac{1 - |\alpha|^{-(n+1)}}{1 - |\alpha|^{-1}} \underset{n\infty}{\sim} \frac{-|\alpha|^{-(n+1)}}{1 - |\alpha|^{-1}}.$$

On a donc :

$$\sum_{i=0}^{n} |b_i \alpha^{-i}| = o(|\alpha|^{-n}).$$

Comme :

$$|v_n| = |\alpha|^n \Big| \sum_{i=0}^{n} b_i \alpha^{-i} \Big| \leqslant |\alpha|^n \sum_{i=0}^{n} |b_i \alpha^{-i}|,$$

On obtient $|v_n| = o(1)$, c'est-à-dire $v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1$.

Enfin :

$$u_n = \ell \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} + v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{1-\alpha}.$$

2. On a, pour tout n : $\begin{cases} v_{n+1} = \alpha v_n + w_n \\ v_n = \alpha v_{n-1} + w_{n-1} \\ \quad\vdots \\ v_1 = \alpha v_0 + w_0, \end{cases}$

d'où, en reportant : $$v_{n+1} = \alpha^{n+1} v_0 + \sum_{j=0}^{n} \alpha^j w_{n-j}.$$

En utilisant 1., on a donc : $v_{n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 + \dfrac{\ell}{1-\alpha}$, d'où : $v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{1-\alpha}$.

3.(a) Il est évident que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_0^{(n)} = a$, donc : $x_0^{(n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} a$.

3.(b) On a : $$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad x_1^{(n)} = \frac{x_0^{(n-1)} + x_1^{(n-1)}}{2}.$$

On applique le résultat de 2., avec $x_1^{(n)}$ à la place de v_n et $\dfrac{1}{2}x_0^{(n)}$ à la place de w_n, d'où, puisque $x_0^{(n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} a$: $x_1^{(n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\frac{1}{2}a}{1-\frac{1}{2}} = a$.

On conclut : $x_1^{(n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} a$.

3.(c) On a, pour tout $k \geqslant 0$ et tout $n \geqslant 0$:

$$x_{k+1}^{(n+1)} = \frac{1}{k+2}\sum_{j=0}^{n+1} x_j^{(n)} = \frac{1}{k+2}x_{n+1}^{(n)} + \frac{1}{k+2}\sum_{j=0}^{n} x_j^{(n)}.$$

3.(d) Raisonnons par récurrence forte sur k.

On a vu : $x_0^{(n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} a$.

Supposons : $$\forall\, j \in \{0, ..., k\},\quad x_j^{(n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} a.$$

On applique le résultat de 2., avec :

$$\alpha \longleftarrow \frac{1}{k+2}, \qquad v_n \longleftarrow x_{k+1}^{(n)}, \qquad w_n \longleftarrow \frac{1}{k+2}\sum_{j=0}^{k} x_j^{(n)},$$

ce qui est possible, car on a bien alors $|\alpha| < 1$ et $w_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{k+2}(k+1)a$. D'où :

$$x_{k+1}^{(n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{\frac{1}{k+2}(k+1)a}{1 - \frac{1}{k+2}} = a,$$

ce qui montre la propriété au rang $k+1$.

Ainsi : $$\forall\, k \in \mathbb{N},\quad x_k^{(n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} a,$$

et donc, par définition de la convergence simple, la suite $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la suite constante égale à a.

4. Cette question revient à montrer que la convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Supposons $x^{(n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} y$ dans E, c'est-à-dire $||x^{(n)} - y|| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme : $\qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad |x_k^{(n)} - y_k| \leqslant ||x^{(n)} - y||,$

on a : $\qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_k^{(n)} - y_k \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0,$

c'est-à-dire : $\qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_k^{(n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} y_k.$

Mais on a vu en 3.(d) : $\qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_k^{(n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} a.$

Par unicité de la limite, on conclut :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad y_k = a.$$

5. Supposons que $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ converge dans E vers un élément noté y, c'est-à-dire supposons que $||x^{(n)} - y|| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$. Puisque la suite $(x_k)_{k\geqslant 0}$ converge vers c, d'après le Préliminaire 3 (Césaro), pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(x_k^{(n)})_{k\geqslant 0}$ converge vers c.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $||x^{(N)} - y|| \leqslant \varepsilon$. On a donc :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad |x_k^{(N)} - y_k| \leqslant \varepsilon.$$

Pour N fixé, en faisant tendre l'entier k vers l'infini, on a donc : $|c - y_k| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi : $\quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad |c - y_k| \leqslant \varepsilon, \qquad$ donc $y_k = c$.

Mais, d'après 4., puisque $x^{(n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} y$ dans E, y est la suite constante égale à a, c'est-à-dire nulle, d'où $c = 0$, contradiction.

On conclut : la suite $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ diverge dans E.

B. Lissage : un résultat négatif

1.(a) Soit $y \in B(0, \varepsilon)$. Alors $x_0 + y \in B(x_0, \varepsilon) \subset G$, donc $x_0 + y \in G$. Mais aussi $x_0 \in B(x_0, \varepsilon) \subset G$, donc $x_0 \in G$. Comme G est un sev, on déduit $y = (x_0 + y) - x_0 \in G$.

Ceci montre : $\ B(0, \varepsilon) \subset G$.

1.(b) Soit $z \in F - \{0\}$. Alors, $\dfrac{\varepsilon}{2||z||} z \in B(0, \varepsilon) \subset G$, puis, comme G est un sev, $z = \dfrac{2||z||}{\varepsilon}\Big(\dfrac{\varepsilon}{2||z||}\Big) \in G$.

D'autre part, il est évident que $0 \in G$.

On conclut : $G = F$.

2.(a) Soit $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ une suite dans E_c, convergeant vers un élément y de E. Chaque $x^{(n)}$ converge vers un élément c_n de $\mathbb{C}$. Comme la suite $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers y et que chaque $x^{(n)}$ converge vers c_n, on a, par le théorème de la double limite :

$$\lim_{n\infty} \lim_{k\infty} x_k^{(n)} = \lim_{k\infty} \lim_{n\infty} x_k^{(n)},$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n\infty} c_n = \lim_{k\infty} y_k,$$

ce qui montre $y \in E_c$.

On conclut que E_c est fermé dans E.

2.(b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$E_n = (T^n)^{-1}(E_c).$$
Comme E_c est fermé dans E et que T^n est continue sur E, (par composition, puisque T est continue sur E), E_n est fermé dans E. Comme on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n \neq E$, d'après 1.(b), par contraposition, E_n est d'intérieur vide. D'après le théorème admis dans l'énoncé, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est d'intérieur vide, donc son complémentaire est dense dans E. Mais ce complémentaire est $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \complement_E(E_n)$, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in E$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $T^n x$ diverge dans $\mathbb{C}$.

On conclut que l'ensemble des $x \in E$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $T^n x$ diverge dans $\mathbb{C}$ est dense dans E.

3.(a) L'élément t_1 de l'énoncé est inutile car il suffit de remplacer t_0 par t_1.

On calcule, pour $t \geqslant t_0 + 1$ et $j \in \mathbb{N}$, $g^{(j)}(t)$ par la formule de Leibniz :
$$\begin{aligned} g^{(j)}(t) &= (t+1)f^{(j)}(t) + jf^{(j-1)}(t) - tf^{(j)}(t-1) - jf^{(j-1)}(t-1) \\ &= f^{(j)}(t) + t\big(f^{(j)}(t) - f^{(j)}(t-1)\big) + j\big(f^{(j-1)}(t) - f^{(j-1)}(t-1)\big). \end{aligned}$$
Supposons $j \leqslant n-1$, donc $j \leqslant n$ et $j+1 \leqslant n$.

On a, par l'inégalité des accroissements finis appliquée à $f^{(j)}$ sur $[t-1\,;t]$ et en utilisant (H_n) :
$$\big|f^{(j)}(t) - f^{(j)}(t-1)\big| \leqslant \operatorname*{Sup}_{u\in[t-1;t]} \big|f^{(j+1)}(t)\big| \leqslant \frac{M_{j+1}}{u^{j+1}} \leqslant \frac{M_{j+1}}{(t-1)^{j+1}}$$
et, de même :
$$\big|f^{(j-1)}(t) - f^{(j-1)}(t-1)\big| \leqslant \frac{M_j}{(t-1)^j}.$$
D'où :
$$|g^{(j)}(t)| \leqslant |f^{(j)}(t)| + t\big|f^{(j)}(t) - f^{(j)}(t-1)\big| + j\big|f^{(j-1)}(t) - f^{(j-1)}(t-1)\big| \leqslant \frac{M_j}{t^j} + t\frac{M_{j+1}}{(t-1)^{j+1}} + j\frac{M_j}{(t-1)^j}.$$
Nous allons essayer de remplacer le dénominateur $(t-1)^j$ par t^j.

Il est clair qu'on peut imposer $t_1 \geqslant 2$.

On a alors, puisque $t \longmapsto \dfrac{t}{t-1}$ est décroissante sur $[t_1\,; +\infty[$: $\dfrac{t}{t-1} \leqslant 2$, puis :
$$|g^{(j)}(t)| \leqslant \frac{M_j}{t^j} + \frac{M_{j+1}}{t^j}\Big(\frac{t}{t-1}\Big)^{j+1} + j\frac{M_j}{t^j}\Big(\frac{t}{t-1}\Big)^j \leqslant \frac{M_j}{t^j} + \frac{M_{j+1}}{t^j}2^{j+1} + j\frac{M_j}{t^j}2^j.$$
En notant $M'_j = M_j + M_{j+1}2^{j+1} + jM_j 2^j$, on obtient (H_{n-1}) pour g.

Une variante (pour amener t^j à la place de $(t-1)^j$) consiste à remarquer que $\dfrac{t^j}{(t-1)^j} \underset{t \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$.

3.(b) Notons $U : f \longmapsto g$, où g est définie en III C3.

• On a, par définition de g et d'après II A1. : $\mathcal{T}^{-1}y = \big(g(k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$.

En notant $x = \big(g(k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$, on a donc $x = \mathcal{T}^{-1}y$, $y = \mathcal{T}x$.

De plus, d'après (H_0), g est borné, donc $x \in E$.

On a alors $x \in E$ et $y = Tx$.

• En réitérant, $U^n f$ est de classe C^∞ sur $[n\,; +\infty[$, bornée, et : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $U^n f(k) = (T^{-n}g)_k$.

Donc la suite $x = T^{-n}y$ est bornée, $T^{-n}y \in E$, et $y = T^n x$.

3.(c) i. Ici, $f(t) = \exp\big(\mathrm{i}\ln(t+1)\big) = (t+1)^{\mathrm{i}}$,

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(t) = \mathrm{i}(\mathrm{i}-1)\cdots(\mathrm{i}-n+1)(t+1)^{\mathrm{i}-n}$, d'où $\left|t^n f^{(n)}(t)\right| \leqslant M_n$,

en notant $M_n = \Big|\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(\mathrm{i}-k)\Big|$, puisque $|(t+1)^{\mathrm{i}}| = 1$ et que $0 \leqslant \dfrac{t}{t+1} \leqslant 1$.

Ainsi, f vérifie (H_n).

D'après (b), il existe $x \in E$ tel que $y = T^n x$, donc $y \in \mathrm{Im}\,(T^n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii. Supposons que y converge : $y_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{C}$.

On a :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad |y_k| = \left|\exp\big(\mathrm{i}\ln(k+1)\big)\right| = 1,$$

donc, par passage à la limite lorsque l'entier k tend vers l'infini, $|\lambda| = 1$ et donc $\lambda \neq 0$.

D'autre part :

$$y_{2k-1} = \exp\big(\mathrm{i}\ln(2k)\big) = \exp\left(\mathrm{i}\ln 2 + \mathrm{i}\ln k\right) = \exp\left(\mathrm{i}\ln 2\right) y_{k-1},$$

d'où, par passage à la limite lorsque l'entier k tend vers l'infini : $1 = \exp\left(\mathrm{i}\ln 2\right)$, $\mathrm{i}\ln 2 = 2\mathrm{i}q\pi$, $q \in \mathbb{Z}$, $\ln 2 = 2q\pi$, contradiction.

Ceci montre que y diverge.

Si x était dans E_n, alors $y = T^n x$ serait convergente, contradiction ; donc $x \notin E_n$.

Ainsi, il existe $x \in E$ tel que $x \notin E_n$, et donc $E_n \neq E$.

C. Aspect probabiliste

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'une part, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $p(a_k \leqslant X_k \leqslant b_k) = b_k - a_k$,

donc X_k suit une loi uniforme sur $[0\,;1]$.

D'autre part, on a :

$$\big\{x \in \Omega\,;\, \forall\, j \in \{0,...,n\}, \quad a_j \leqslant X_j \leqslant b_j\big\} = \Omega_{K_{a,b}},$$

donc :

$$p\big(\forall\, j \in \{0,...,n\}, \quad a_j \leqslant X_j \leqslant b_j\big) = \prod_{j=0}^{n}(b_j - a_j).$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p\big(\forall\, j \in \{0,...,n\}, \quad a_j \leqslant X_j \leqslant b_j\big\} = \prod_{j=0}^{n} p(a_j \leqslant X_j \leqslant b_j),$$

donc les variables aléatoires X_k, $k \in \mathbb{N}$ sont (mutuellement) indépendantes.

2. La question revient au calcul du volume de l'ensemble $V_p(\varepsilon)$ des $(y, x_1, ..., x_p)$ de $[0\,;1]^{p+1}$ tels que :

$$\forall\, i \in \{1,...,p\}, \quad |y - x_i| \leqslant \varepsilon.$$

Notons, pour tout $y \in [0\,;1]$, $W_p(y,\varepsilon)$ l'ensemble des $(x_1, ..., x_p) \in [0\,;1]^p$ tels que :

$$\forall\, i \in \{1,...,p\}, \quad |y - x_i| \leqslant \varepsilon.$$

On a alors :

$$\mathrm{Vol}\big(V_p(\varepsilon)\big) = \int_0^1 \mathrm{Vol}\big(W_p(y,\varepsilon)\big)\,\mathrm{d}y.$$

On peut supposer (l'énoncé ne l'indique pas clairement) : $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Pour tout $y \in [0\,;1]$, $W_p(y,\varepsilon)$ est un pavé, d'où son volumne :

$$\operatorname{Vol}\big(W_p(y,\varepsilon)\big) = \begin{cases} (y+\varepsilon)^p & \text{si } \ 0 \leqslant y \leqslant \varepsilon \\ \varepsilon^p & \text{si } \ \varepsilon \leqslant y \leqslant 1-\varepsilon \\ (1-y+\varepsilon)^p & \text{si } \ 1-\varepsilon \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

D'où :

$$\operatorname{Vol}\big(V_p(\varepsilon)\big) = \int_0^{\varepsilon} (y+\varepsilon)^p \,\mathrm{d}y + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \varepsilon^p \,\mathrm{d}y + \int_{1-\varepsilon}^{1} (1-y+\varepsilon)^p \,\mathrm{d}y$$

$$= \Big[\frac{(y+\varepsilon)^{p+1}}{p+1}\Big]_0^{\varepsilon} + (1-2\varepsilon)\varepsilon^p + \Big[-\frac{(1-y+\varepsilon)^{p+1}}{p+1}\Big]_{1-\varepsilon}^{1} = 2\frac{(2\varepsilon)^{p+1} - \varepsilon^{p+1}}{p+1} + (1-2\varepsilon)\varepsilon^p.$$

Il est clair alors que :

$$\operatorname{Vol}\big(V_p(\varepsilon)\big) \underset{p\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p\big(\forall\, j \geqslant 1, \ \ |X_{n+j} - X_n| \leqslant \varepsilon\big) = 0,$$

puis, par réunion croissante :

$$p\big(\exists\, n \in \mathbb{N}, \ \forall\, j \geqslant 1, \ \ |X_{n+j} - X_n| \leqslant \varepsilon\big) = 0.$$

3. Notons $C = \big\{\omega \in \Omega\,;\ \big(X_k(\omega)\big)_{k\geqslant 0} \in E_c\big\}$.
Soit $\varepsilon \in \Big]0\,;\dfrac{1}{2}\Big[$.
Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$C(n,\varepsilon) = \big\{\omega \in \Omega\,;\, \forall\, j \geqslant n+1, \ \ \big|X_j(\omega) - X_n(\omega)\big| \leqslant \varepsilon\big\}.$$

On a donc : $C = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C(n,\varepsilon)$.

Par sous-additivité dénombrable : $p(C) \leqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p\big(C(n,\varepsilon)\big)$.

Et : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \ \ C(n,\varepsilon) = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} C(n,p,\varepsilon)$, donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \ \forall\, p \geqslant 1, \ \ p\big(C(n,\varepsilon)\big) \leqslant p\big(C(n,p,\varepsilon)\big).$$

D'après C 2., $p\big(C(n,p,\varepsilon)\big) = 0$, d'où $p\big(C(n,\varepsilon)\big) = 0$, puis $p(C) = 0$.
On conclut : x diverge presque sûrement.

4. D'après la loi forte des grands nombres, la suite $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge presque sŝement vers $\dfrac{1}{2}$, espérance commune des variables aléatoires indépendantes X_k, $k \geqslant 0$.

* *