Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

pour mercredi 14 janvier 2006

Thème : Séries de fonctions, séries entières

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$a)\ \sum_{n\geqslant 0} (\mathrm{e}^{\sqrt{n+1}} - \mathrm{e}^{\sqrt{n}})z^n \qquad b)\ \sum_{n\geqslant 1} \Big(1+\frac{(-1)^n}{n}\Big)^{n^2} z^n \qquad c)\ \sum_{n\geqslant 0} (\mathrm{C}_{5n}^{2n})^{-1} z^n \qquad d)\ \sum_{n\geqslant 0} (\ln(n!))z^n.$$

Exercice 2

Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

$$a)\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^4+n^2+1}{n!} z^n \qquad b)\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!} z^n \qquad c)\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n}}{3n+1}$$

$$d)\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(2n-1)} x^n \qquad e)\sum_{n\geqslant 0} \Big(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \,\mathrm{d}t\Big) x^n.$$

Exercice 3

Existence et calcul du développement en série entière pour les fonctions $f : x \longmapsto f(x)$ données par $f(x)$:

$$a)\ \frac{2(1-\cos x) - x\sin x}{x^3} \qquad b)\ \ln(x^2-8x+15) \qquad c)\ \frac{\sin 4x}{\sin x} \qquad d)\ \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 4

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_n(x) = \dfrac{\mathrm{Arctan}\,(nx)}{n^2}$.

1) Étudier les convergences de la série d'applications $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$. On note S la somme : $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$.

2) Montrer que S est continue sur $[0\,;+\infty[$.

3) Montrer que S est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$ et que :

$$\forall\, x \in]0\,;+\infty[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}.$$

En déduire le sens de variation de S sur $[0\,;+\infty[$.

4) Montrer que S est de classe C^2 sur $]0\,;+\infty[$ et que S est concave sur $[0\,;+\infty[$.

5) En utilisant une comparaison série-intégrale, démontrer : $\quad S'(x) \underset{x \longrightarrow 0^+}{\sim} -\ln x$.

Quelle est la limite de $S'(x)$ lorsque $x \longrightarrow 0^+$? Est-ce que S est dérivable en 0 ?

6) Établir : $S(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi^3}{12}$. À cet effet, on admettra : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

7) Dresser le tableau de variation de S et tracer la courbe représentative C de S.

8) On note $\alpha = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$, $\beta = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5}$, et, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$: $T(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{nx}\right)$.

8)a) Rappeler la formule liant $\mathrm{Arctan}\,u$ et $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{u}\right)$, pour tout $u \in]0\,;+\infty[$.

8)b) En déduire, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$: $S(x) = \dfrac{\pi^3}{12} - T(x)$.

8)c) Établir : $\quad \forall\, u \in [0\,;+\infty[, \quad 0 \leqslant u - \mathrm{Arctan}\,u \leqslant \dfrac{u^3}{3}$.

8)d) En déduire, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$: $\quad \left|T(x) - \dfrac{\alpha}{x}\right| \leqslant \dfrac{\beta}{3x^3}$.

8)e) Conclure par le développement asymptotique de $S(x)$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$:

$$S(x) = \frac{\pi^3}{12} - \frac{\alpha}{x} + \underset{x \longrightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

* *