Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

pour mercredi 3 septembre 2008

Exercices de révision

Thème : Suites et séries de fonctions

Cours

Réviser les suites de fonctions et les séries de fonctions.

Référence : Jean-Marie Monier, Analyse MP, Cours, exercices-types, méthodes, exercices résolus, Dunod, 9 782 100 510 399, chapitre 5, pages 287-349.
Il y a trois niveaux de travail :

Niveau I : Élémentaire :

Définitions de la convergence simple et de la convergence uniforme pour une suite de fonctions, propriétés élémentaires.

Définitions de la convergence simple, de la convergence absolue, de la convergence normale, de la convergence uniforme d'une série de fonctions, propriétés élémentaires.

Niveau II : Moyen :

Propriétés relatives à : limite, continuité, intégration, dérivation.

Niveau III : Avancé :

CNS de Cauchy de convergence uniforme d'une suite de fonctions, CNS de Cauchy de convergence uniforme d'une série de fonctions, transformation d'Abel.

Exercices

Les exercices sont tirés du livre de Cours Analyse MP.

Niveau I

1 Étudier (convergence simple, convergence uniforme) les suites d'applications suivantes :

a) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

b) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx^2}$.

2 Soit $(f_n : X \longrightarrow \mathbb{R})_n$ une suite d'applications convergeant uniformément vers une application f.

Montrer que $\left(\dfrac{|f_n|}{1+f_n^2}\right)_n$ converge uniformément vers $\dfrac{|f|}{1+f^2}$.

3 Étudier (convergences simple, absolue, uniforme, normale) les séries d'applications $\sum_n f_n$ suivantes :

a) $f_n : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n^2(x^{2n} - x^{2n+1}), \quad n \geqslant 0$

b) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{nx}{n^4+x^2}, \quad n \geqslant 1$

c) $f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{\ln(n+x)}{n^2+x^2}, \quad n \geqslant 1$

d) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}, \quad n \geqslant 1$

e) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^x}, \quad n \geqslant 1$.

Niveau II

1 Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x(x - \ln(\mathrm{e}^{x} - 1))\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

2 *a)* Étudier les convergences de la série d'applications $\sum_{n\geqslant 0} f_n$, où

$$f_n :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2x}.$$

On note S la somme.

b) Montrer que S est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$.

c) Former le développement asymptotique de $S(x)$ à la précision $o(\mathrm{e}^{-5x})$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de S.

****