Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

pour mercredi 1er octobre 2008

Exercices de révision

Thème : Équations différentielles

Cours

Réviser les équations différentielles.

Références :

Jean-Marie Monier, Analyse MPSI, Cours, exercices-types, méthodes, exercices résolus, Dunod, 9 782 100 498 376, chapitre 10, pages 337-358,

Jean-Marie Monier, Analyse MP, Cours, exercices-types, méthodes, exercices résolus, Dunod, 9 782 100 510 399, chapitre 4, pages 219-286.

Il y a deux niveaux de travail :

Niveau I : Élémentaire :

Équations différentielles linéaires du premier ordre, équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et avec second membre polynôme-exponentielle

Niveau II : Moyen :

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients variables, équations différentielles non linéaires, systèmes différentiels, théorèmes de Cauchy.

Exercices

Les exercices sont tirés du livre de cours Analyse MPSI pour le niveau I, Analyse MP pour le niveau II.

Niveau I

1 Résoudre l'équation différentielle (E) $xy' + 2y = \dfrac{x}{x^2+1}$, d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$, pour $I =]-\infty\,;0[$, $I =]0\,;+\infty[$, $I = \mathbb{R}$.

2 Résoudre l'équation différentielle (E) $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{x}\sin x$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (variable x).

3 Résoudre l'équation différentielle (E) $y'' + y = \mathrm{Max}\,(x, 0)$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (variable x).

Niveau II

1 Résoudre le problème de Cauchy (C) $\begin{cases} y' = y^2\cos x \\ y(0) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ d'inconnue y, variable x.

2 Trouver toutes les applications $f :]-1\,;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall\, x \in]-1\,;1[, \quad f'(x)f(-x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

3 Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = 3x + y - z + 1 \\ y' = x + y + z + \mathrm{e}^{\,t} \\ z' = 2x + 2z \end{cases}$$

d'inconnues $x, y, z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, variable t.

4 Résoudre l'équation différentielle (E) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 2$, d'inconnue $y :]0\,;1[\longrightarrow \mathbb{R}$.

5 On considère le problème de Cauchy (C) $\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ d'inconnue y dérivable sur un intervalle, et à valeurs réelles.

a) Montrer que (C) admet une solution maximale et une seule.
On note y celle-ci et I son intervalle de définition.

b) Montrer que I est symétrique par rapport à 0 et que y est impaire.

c) Démontrer qu'il existe $a \in]0\,;+\infty[$ tel que $I =]-a\,;a[$.
À cet effet, on pourra raisonner par l'absurde et considérer $\dfrac{y'}{y^2}$.

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de y.

* *