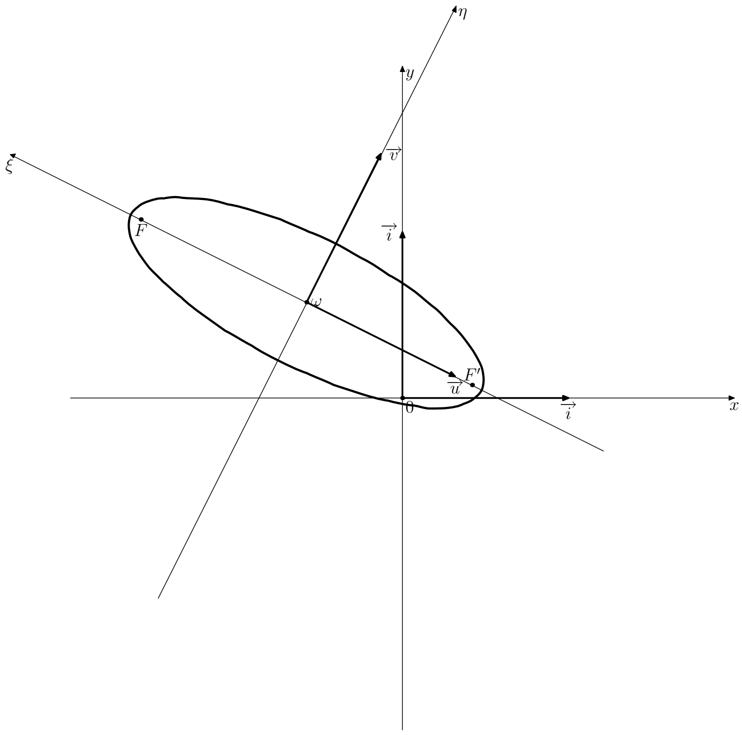


Fig. 1 – Ellipse d'équation $13x^2 + 32xy + 37y^2 - 2x - 14y - 5 = 0$

Exercice 1

1. Les termes de plus haut degré $13x^2+32xy+37y^2$ s'écrivent $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 16 \\ 16 & 37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $\begin{vmatrix} 13-\lambda & 16 \\ 16 & 37-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 50\lambda + 225$ de valeurs propres 5 et 45.
Les vecteurs propres correspondant à la valeur $\lambda = 5$ sont donnés par le système $\left| \begin{matrix} 8x+16y=0 \\ 16x+32y=0 \end{matrix} \right.$, soit $x = -2y$. Un vecteur propre de norme 1 vérifie $y^2 + 4y^2 = 1$, c'est donc $\overrightarrow{u} = \left(-\frac{\pm 2}{\sqrt{5}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}\right)$.
Les vecteurs propres correspondant à la valeur $\lambda = 45$ sont donnés par le système $\left| \begin{matrix} -32x+16y=0 \\ 16x-8y=0 \end{matrix} \right.$, soit $y = 2x$. Un vecteur propre de norme 1 vérifie $x^2 + 4x^2 = 1$, c'est donc $\overrightarrow{v} = \left(\frac{\pm 1}{\sqrt{5}}, \frac{\pm 2}{\sqrt{5}}\right)$.
Pour conserver un repère dans le sens direct, on choisira $\overrightarrow{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$ et $\overrightarrow{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.
Effectuons le changement de variables
$$\begin{array}{lll} X & = \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y \\ Y & = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y \end{array} \text{ soit } \begin{array}{ll} x & = \frac{2}{\sqrt{5}}X + \frac{1}{\sqrt{5}}Y \\ y & = -\frac{1}{\sqrt{5}}X + \frac{2}{\sqrt{5}}Y \end{array}.$$
L'équation $13x^2 + 32xy + 37y^2 - 2x - 14y - 5 = 0$ s'écrit alors
$$5X^2 + 45Y^2 + 2\sqrt{5}X - 6\sqrt{5}Y - 5 = 0.$$

En faisant apparaître la somme de deux carrés, on obtient

$$5\left(X+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+45\left(Y-\frac{1}{3\sqrt{5}}\right)^2-7=0.$$

En effectuant dans le repère $(0,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, le changement de variables

$$\begin{array}{l}\xi=X+\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \eta=Y-\frac{1}{3\sqrt{5}}\end{array},$$

on obtient l'équation réduite

$$\frac{5}{7}\xi^2+\frac{45}{7}\eta^2-1=0.$$

Il s'agit donc d'une ellipse réelle qui est représentée sur la Figure 1. Dans le repère $\left(\omega=-\frac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{u}+\frac{1}{3\sqrt{5}}\overrightarrow{v},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ soit $\left(\omega=(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}),\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$, on a $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-1=0$ avec $a=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$, $b=\frac{\sqrt{7}}{5}$ et $c=\frac{2}{3}\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$ (avec $c^2=a^2-b^2$). Les foyers sont $\left(\pm\frac{2}{3}\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}},0\right)$. Les directrices sont les droites d'équation $\xi=\pm\frac{3}{2}\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}}$. L'excentricité est $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2. Les termes de plus haut degré xy s'écrivent $\begin{bmatrix} x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\frac{1}{4}$ de valeurs propres $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.
Les vecteurs propres correspondant à la valeur $\lambda=\frac{1}{2}$ sont donnés par le système $\left|\begin{array}{l}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=0\\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=0\end{array}\right.$, soit $x=-y$. Un vecteur propre de norme 1 vérifie $x^2+x^2=1$, c'est donc $\overrightarrow{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
Les vecteurs propres correspondant à la valeur $\lambda=\frac{1}{2}$ sont donnés par le système $\left|\begin{array}{l}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=0\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y=0\end{array}\right.$, soit $x=y$. Un vecteur propre de norme 1 vérifie $x^2+x^2=1$, c'est donc $\overrightarrow{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
Effectuons le changement de variables

$$\begin{array}{ll}X&=\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y\\ Y&=\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y\end{array}\ \text{soit}\ \begin{array}{ll}x&=\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}Y\\ y&=-\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}Y\end{array}.$$

L'équation $xy+3x+5y-4=0$ s'écrit alors

$$X^2-Y^2-2\sqrt{2}X+8\sqrt{2}Y-8=0.$$

En faisant apparaître la différence de deux carrés, on obtient

$$\left(X+\sqrt{2}\right)^2-\left(Y+4\sqrt{2}\right)^2+10=0.$$

En effectuant le changement de variables

$$\begin{array}{l}\xi=X+\sqrt{2}\\ \eta=Y+4\sqrt{2}\end{array},$$

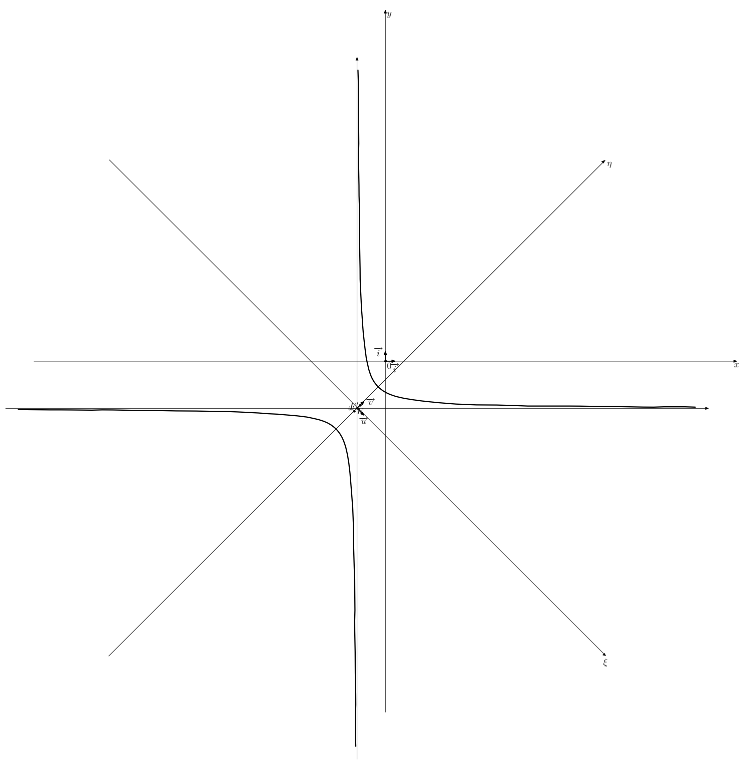


FIG. 2 – Hyperbole équilatère d'équation $xy + 3x + 5y - 4 = 0$

on obtient l'équation réduite

$$\frac{1}{10}\xi^2 - \frac{1}{10}\eta^2 - 1 = 0.$$

Il s'agit donc d'une hyperbole équilatère qui est représentée sur la Figure 2.
Dans le repère , $\left(\omega = (-\sqrt{2}\overrightarrow{u} - 4\sqrt{2}\overrightarrow{v}), \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \right)$ soit $(\omega = ((-3,-5), \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v},),$
on a $\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0$ avec $a = b = \frac{1}{\sqrt{10}}$, et $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (avec $c^2 = a^2 + b^2$).
Les foyers sont $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$. Les directrices sont les droites d'équation $\xi = \pm\frac{1}{2\sqrt{5}}$. L'excentricité est $\sqrt{2}$.
On observe que, sans méthode générale, on a :

$$xy + 3x + 5y - 4 = (x + 3)(y + 5) - 19,$$

ce qui permet de reconnaître immédiatement une hyperbole équilatère dans le repère trouvé.

3. Les termes de plus haut degré $x^2 - 2xy + y^2$ s'écrivent $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.
Son polynôme caractéristique est $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 1$ de valeurs propres 0 et 2. La valeur propre 0 apparaissant, on a une *parabole*.
Les vecteurs propres correspondant à la valeur $\lambda = 2$ sont donnés par le système $\left|\begin{array}{l} -x-y=0 \\ -x-y=0 \end{array}\right.$, soit $x = -y$. Un vecteur propre de norme 1

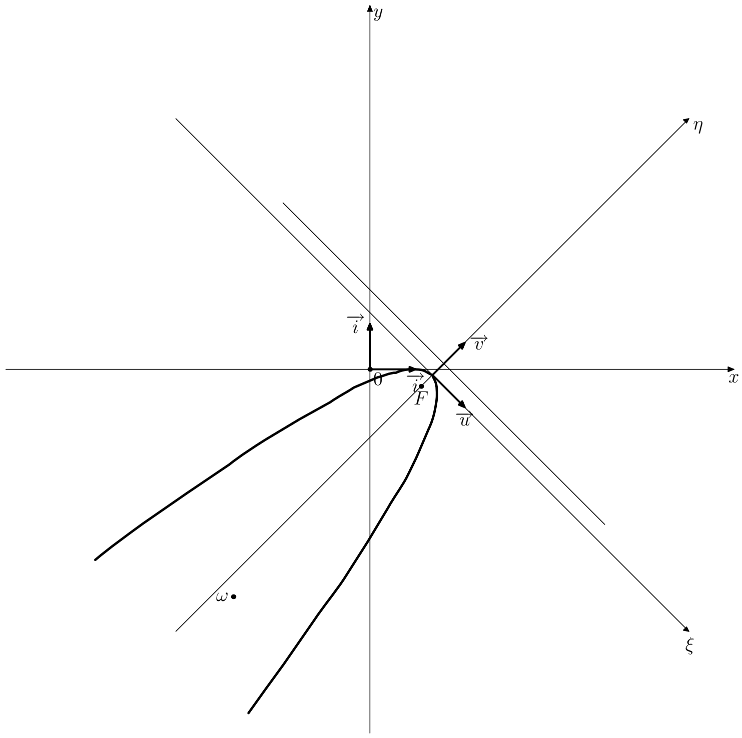


FIG. 3 – Parabole d'équation $(x-y)^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

vérifie $x^2 + x^2 = 1$, c'est donc $\overrightarrow{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
Les vecteurs propres correspondant à la valeur $\lambda = 0$ sont donnés par le système $\left|\begin{smallmatrix} x-y=0 \\ x-y=0 \end{smallmatrix}\right.$, soit $x = y$. Un vecteur propre de norme 1 vérifie $x^2 + x^2 = 1$, c'est donc $\overrightarrow{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
Effectuons le changement de variables

$$\begin{array}{ll} X & = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ Y & = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{array} \text{ soit } \begin{array}{ll} x & = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y & = -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \end{array}.$$

L'équation $(x-y)^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ s'écrit alors

$$2X^2 - 3\sqrt{2}X + \sqrt{2}Y + 1 = 0.$$

En faisant apparaître un carré, on obtient

$$2\left(X - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \sqrt{2}Y - \frac{5}{4} = 0,$$

ce qui s'écrit aussi

$$2\left(X - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \sqrt{2}\left(Y - \frac{5}{4\sqrt{2}}\right) = 0.$$

En effectuant le changement de variables

$$\begin{aligned}\xi &= X - \tfrac{3\sqrt{2}}{4} \\ \eta &= Y - \tfrac{5}{4\sqrt{2}}\end{aligned},$$

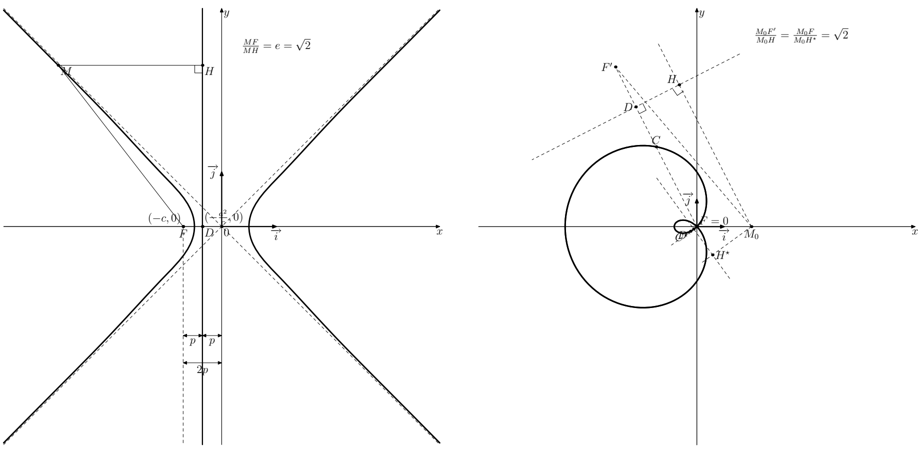
on obtient l'équation réduite

$$2\xi^2 + \sqrt{2}\eta = 0 \text{ soit } \eta = -\sqrt{2}\xi^2.$$

Il s'agit donc bien d'uneparabole qui est représentée sur la Figure 3.
On observe qu'au point $(1, 0)$ la parabole est tangente à l'axe des abcisses.
Dans le repère , $\Big(\omega = (\frac{3\sqrt{2}}{4}\overrightarrow{u} + \frac{5}{4\sqrt{2}}\overrightarrow{v}), \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}),\Big)$ soit $\big(\omega = ((\frac{11}{8}, -\frac{1}{8}), \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \big),$ on a $\eta = 2p\xi^2$ avec $p = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Le foyer est $(0, \frac{1}{4\sqrt{2}})$ et la directrice est $\eta = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$.

Exercice 2

Sous équation réduite, une hyperbole équilatère s'écrit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{Y^2}{a^2} - 1 = 0$.



(a) Hyperbole équilatère (b) Lieu

Fig. 4 – Exercice 3

On a alors (voir Figure 4 a)) $c = \sqrt{2}a$, l'excentricité e est $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$, et, si D est le peid de la directrice sur l'axe des foyers F et F' et C le centre de l'hyperbole, $CD = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. En posant $p = CD$, on obtient $p = \frac{a}{\sqrt{2}}$ et $CF = c = a\sqrt{2}$; donc, $CF = 2\ CD = 2p$.
On se donne la conique sous la forme $\frac{MF}{MH} = e$ où F est un foyer et H le pied de la perpendiculaire issue de M à la directrice (D). Les coniques cherchées étant des hyperboles équilatères, on a $e = \sqrt{2}$. En prenant le foyer connu comme origine O, et la directrice (D) la droite d'équation $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$, l'équation d'une telle hyperbole s'écrit

$$x^2 + y^2 - 2(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p)^2 = 0$$

où p est la distance FD sur la Figure 4 a). Si le point donné M_0 est le point $(b, 0)$, l'hyperbole équilatère de foyer O et de directrice (D) passe par M_0 si et seulement si

$$b^2 - 2(b\cos\alpha - p)^2 = 0.$$

soit

$$(b - \sqrt{2}b\cos\alpha - p)(b + \sqrt{2}b\cos\alpha + p) = 0$$

soit si

$$p = b(1 - \sqrt{2}\cos\alpha) \text{ ou } p = -b(1 + \sqrt{2}\cos\alpha).$$

En appelant r la valeur de FC (C centre de la conique), on en conclue que C est à r de F dans la direction α avec $r = 2p$ soit

$$r = 2b(1 - \sqrt{2}\cos\alpha) \text{ ou } r = -2b(1 + \sqrt{2}\cos\alpha). \tag{1}$$

On obtient donc l'équation en polaire de C par 1. On obtient *a priori* deux courbes distinctes correspondant au fait que la branche d'hyperbole (contenant F) ou l'autre passe par M_0. En fait, si on change α en $\pi + \alpha$, $r(\pi + \alpha) = -r(\alpha)$ et donc les deux courbes sont confondues. Le lieu de C est représenté sur la Figure 4 b).

Exercice 3

① On se donne un cercle C d'équation $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$ et une conique Γ non dégénérée (ellipse, hyperbole ou parabole) d'équation $\Psi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + a^{(\prime)}x + p^{(\prime)}y + +a^{(\prime}(\prime) = 0$ tangents au point A et B. Le cas des coniques dégénérées est trivial. On considère la famille $\mathcal{C}_\lambda$ des conique dont l'équation est $\phi(x, y) + \lambda\phi(x, y) = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (C est $\mathcal{C}_\lambda$).
On observe tout d'abord que toutes les coniques de $\mathcal{C}_\lambda$ ont mêmes directions principales (et donc axes de symétrie) que Γ. Pour le cercle C c'est évident : toute droite passant par son centre est axe de symétrie. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, les directions principales sont données par les valeurs propres de $\begin{pmatrix} \lambda + a & b \\ b & c + \lambda \end{pmatrix}$ soit par le déterminant $\begin{vmatrix} \lambda + a - s & b \\ b & c + \lambda - s \end{vmatrix}$.
. Si on note par s_1 et s_2 valeurs propres dans le cas de Γ, alors les valeurs propres de $\mathcal{C}_\lambda$ sont $s_1 + \lambda$ et $s_2 + \lambda$. Donc les vecteurs propres de $\mathcal{C}_\lambda$ (déterminant les directions principales de $\mathcal{C}_\lambda$ sont donnés par un des systèmes

$$\begin{aligned} (\lambda + a - s_i - \lambda)u + bv &= 0 \\ bu + (c + \lambda - s_i - \lambda)v &= 0 \end{aligned}$$

soit par un des systèmes donnant les vecteurs propres de Γ

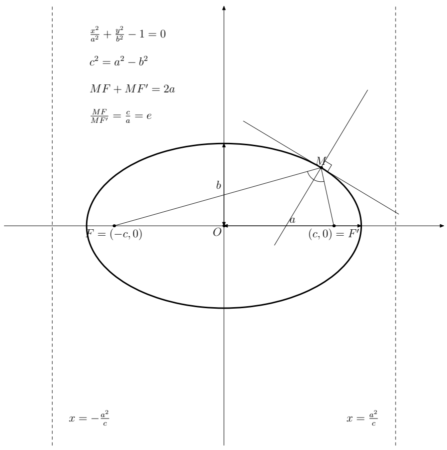
$$\begin{aligned} (a - s_i)u + bv &= 0 \\ bu + (c - s_i)v &= 0 \end{aligned}.$$

Donc les directions principales sont toujours les mêmes et celles de Γ.

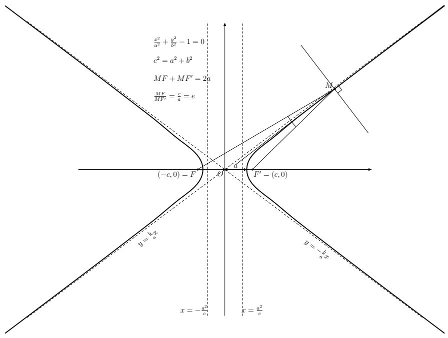
② Montrons maintenant que toute conique K ayant pour intersection avec Γ les points doubles A et B appartient à $\mathcal{C}_\lambda$.

- On se place dans le repère $\mathcal{R}$ non orthogonal dont l'origine est A, le premier vecteur est $\overrightarrow{AB}$ et le second vecteur est porté par la tangente en A commune à C et Γ. C et Γ ont dans ce repère des équations notées $\Phi^\star(X,Y)$ et $\Psi^\star(X,Y)$. On passe du repère initial à ce nouveau repère par une transformation affine de la forme $X = \alpha x + \beta y + \gamma$ et $Y = \alpha' x + \beta' y + \gamma'$, la transformation réciproque étant du même type. Donc l'équation de la conique C_λ est dans ce nouveau repère $\Psi^\star(X,Y) + \lambda\Phi^\star(X,Y)$.
- Une conique quelconque H passant par B et telle que son intersection avec $X = 0$ soit le point *double* A s'écrit $aX^2 + bXY + cY^2 + dX + eY + f = 0$. Le point A appartient à H ; donc $f = 0$. Le point B appartient à H ; donc $a + d = 0$, soit $d = -a$.. Les points d'intersection de H avec la tangente commune en A sont donnés par $aX^2 - aX = 0$; comme on a un point double, il vient $a = 0$. Donc, dans $\mathcal{R}$, l'équation de H est de la forme $bXY + cY^2 + eY = 0$.
- Dans $\mathcal{R}$, la tangente commune en B à C et Γ s'écrit $Y = \theta(X-1)$ (avec $\theta \neq 0$ car sinon C serait une droite double). Exprimons qu'une conique H d'équation (dans $\mathcal{R}$) $bXY + cY^2 + eY = 0$ a un point double comme intersections avec $Y = \theta(X-1)$. L'équation $b\theta(X-1)X + c\theta^2(X-1)^2 + e\theta(X-1) = 0$ a alors une racine double. Il vient $b(X-1)X + c\theta(X-1)^2 + e(X-1) = 0$, soit $(b + c\theta)X^2 - (2c\theta + b - e)X + (c\theta - e) = 0$. Son discriminant est $(2c\theta + b - e)^2 - 4(b + c\theta)(c\theta - e) = (b+e)^2$. Donc, dans $\mathcal{R}$, une conique K a une équation de la forme $bXY + cY^2 - bY = 0$.
- Dans $\mathcal{R}$, les équations de C et Γ sont donc de la forme $b_1XY + c_1Y^2 - b_1Y = 0$ et $b_2XY + c_2Y^2 - b_2Y = 0$. Toute conique K d'équation $bXY + cY^2 - bY = 0$ a une équation qui s'écrit
  $\alpha(b_1XY + c_1Y^2 - b_1Y) + \beta(b_2XY + c_2Y^2 - b_2Y) = 0$.
  Il suffit de choisir α et β tels que $b = \alpha b_1 + \beta b_2$ et $e = \alpha e_1 + \beta e_2$; ce qui est possible car $b_1e_2 - e_1b_2 \neq 0$ (sinon $\frac{b_1}{b_2} = \frac{e_1}{e_2}$ et C et Γ ne sont pas distinctes). Donc toute conique K appartient à $\mathcal{C}_\lambda$.

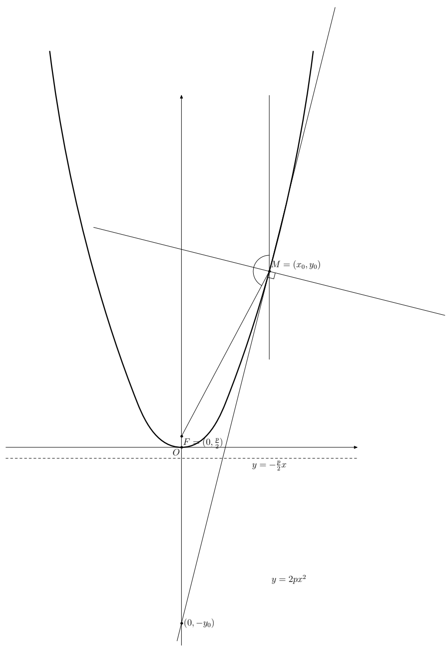
③ la conique DD formée de la droite double (AB) est du type précédent. Donc elle appartient à $\mathcal{C}_\lambda$ et donc la droite (AB) est parallèle à une des directions principales de Γ, notée Δ_1. La droite D_2 passant par le centre de la conique (cas de l'ellipse ou de l'hyperbole) ou le sommet (cas de la parabole) et parallèle à l'autre direction principale $/Delta_2$ orthogonale à Δ_1 est axe de symétrie de Γ et perpendiculaire à (AB). La symétrie par rapport à D_2 envoie donc A sur A ou B. L'image de A ne peut pas être A car sinon Γ ne serait pas une conique propre. Donc, elle envoie donc A sur B. La droite D_2 est alors médiatrice de AB et passe par le centre de C. D'où la conclusion.



(a) Ellipse



(b) Hyperbole



(c) Parabole

FIG. 5 – Propriétés géométriques des coniques