Exercice 1

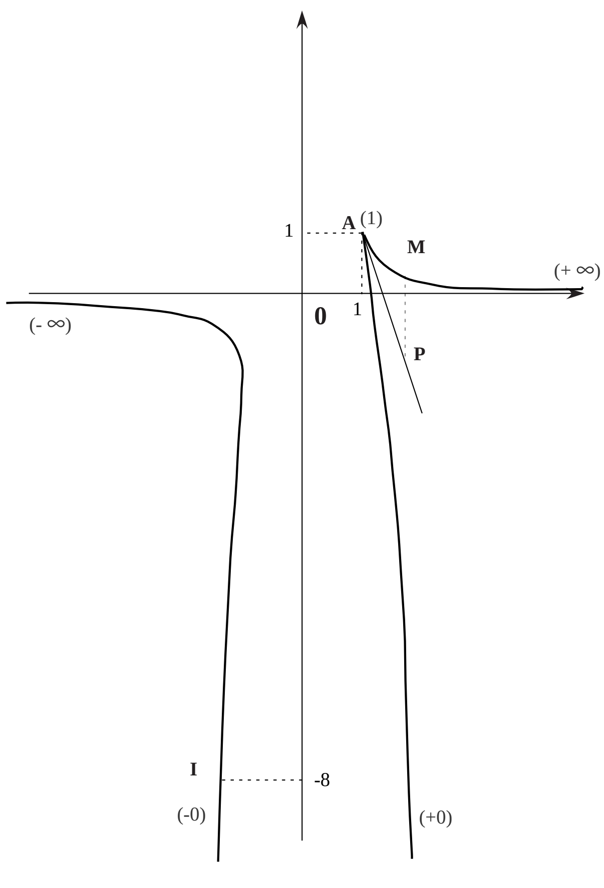
Le calcul des dérivées

$$x' = \frac{u^2-1}{2u^2}, \quad y' = \frac{-2(u-1)}{u^2}$$

permet de dresser le tableau suivant :

u	$-\infty$		-1				0			$+1$		$-\infty$
x	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$	$\|$	$+\infty$	$\searrow$		1	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\searrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$	$\|$	$-\infty$	$\nearrow$		1	$\searrow$	0

Pour $u = 1$, x passe par un minimum et y passe par un maximum ; le point $A(1,1)$ est un point de rebroussement pour la courbe Γ. Le coefficient directeur de la tangente en un point quelconque est $m = -\frac{-4}{u(u+1)}$ et, par suite, la tangente en A a pour coefficient directeur la valeur limite de m pour u tendant vers 1, c'est-à-dire -2. D'autre par $\frac{dm}{du} = \frac{4(2u+1)}{u^2(u+1)^2}$ n'est pas nul pour $u = 1$, c'est donc que A est un point de rebroussement de première espèce.



Contrôlons ce résultat en étudiant la disposition de Γ par rapport à la tangente de rebroussement : celle-ci a pour équation

$$Y + 2X - 3 = 0$$

i P et M sont deux points de même abscisse, le premier sur la tangente en A et le second sur Γ

$$\overline{PM} = y - (-2x+3) \quad \text{ou} \quad y + 2x - 3 = \frac{(u-1)^2}{u^2}$$

$\overline{PM}$ change de signe quand u passe par la valeur 1.
Le point I obtenu pour $u = -\frac{1}{2}$, valeur annulant $\frac{dm}{du}$, est un point d'inflexion.
Les branches infinies de Γ s'obtiennent immédiatement en décomposant les fractions rationnelles x et y en éléments simples

$$x = \frac{1}{2u} + \frac{u}{2} \qquad y = -\frac{1}{u^2} + \frac{2}{u}$$

L'axe Ox est asymptote (cas $u \to \infty$). La direction asymptotique Oy (cas $u \to 0$) est celle d'une branche parabolique. En posant

$$x_1 = \frac{1}{2u} \qquad y_1 = -\frac{1}{u^2} + \frac{2}{u},$$

on obtient un point M_1 qui décrit une parabole $\mathcal{P}_1$ ($y_1 = -4x_1^2 + 4x_1$) asymptote à Γ : $\overline{M_1M}$ a pour coordonnées $\left(\frac{u}{2}, 0\right)$ et a pour limite $(0,0)$ quand u tend vers 0.
Appelons N le point de $\mathcal{P}_1$ qui a même abscisse x que M : l'ordonnée de ce point est

$$-4x^2 + 4x \quad \text{où} \quad x = \frac{u^2+1}{2u}$$

si bien que

$$\overline{NM} = \frac{2u+1}{u^2} + \frac{(u^2+1)^2}{u^2} - \frac{2(u^2+1)}{u}$$
$$\overline{NM} = 2 - 2u - u^2$$

et le vecteur $\overrightarrow{NM}$ ne tens pas vers 0.
La parabole $\mathcal{P}_1$ n'st donc pas la meilleure approximation pour la branche infinie parabolique de Γ.
En prenant la parabole $\mathcal{P}_2$

$$y_2 = -4x^2 + 4x + 2,$$

deux pointts M et M_2 sur Γ et $\mathcal{P}_2$, ayant même abscisse, sont tels que $\overline{M_2M} = -2u + u^2$ tende vers O ; c'est une parabole asymptote de Γ.

Exercice 2

La courbe $\mathcal{C}$ est appelée courbe orthoptique relative à Γ, c'est-à-dire courbe lieu des points d'où l'on voit Γ sous un angle droit.

La construction de Γ est immédiate (cissoïde) ; son équation cartésienne est

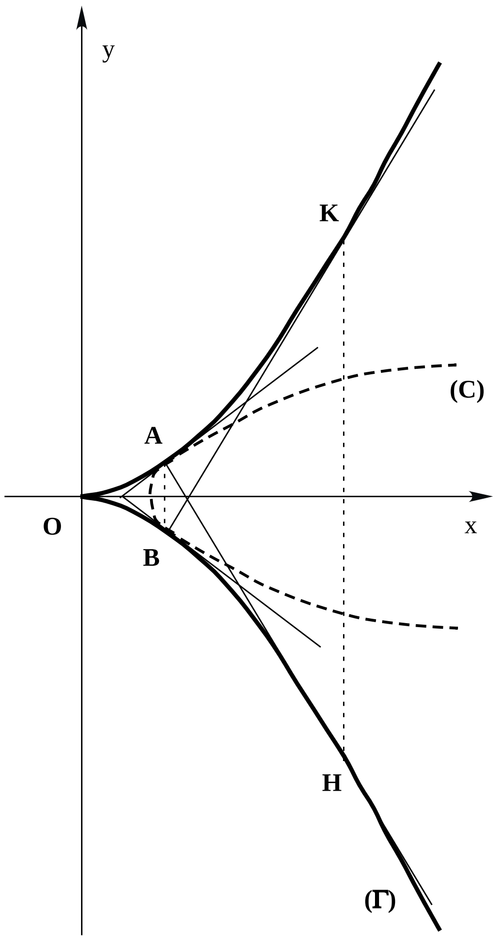
$$4x^3 - 27y^2 = 0$$

La tangente en $M(u)$ a pour équation

$$ux - y - u^3 = 0.$$

La valeur du paramètre u relative au point M est le coefficient directeur de la tangente à Γ en ce point ; l'équation qui donne les coefficients directeurs des tangentes issues du point $P(x_0, y_0)$ du plan est donc

$$u^3 - x_0 u + y_0 = 0 \qquad (1)$$



Pour que P soit un point de $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que l'équation 1 admette deux racines u' et u'' vérifiant la relation $u'u'' = -1$; or le produit des trois racines u', u'' et u''' de l'équation 1 est $-y_0$; pour que $u'u'' = -1$ (si $y_0 \neq 0$) il faut et il suffit que $u''' = y_0$. En écrivant que y_0 est racine de l'équation 1 on trouve ainsi, après division par $y_0 \neq 0$,

$$y_0^2 - x_0 + 1 = 0$$

La courbe orthoptique $\mathcal{C}$ est donc la parabole représentée par l'équation $x = y^2 + 1$.
pour tracer C sur la même figure que Γ, il importe d'étudier d'abord l'intersection de ces deux courbes ; l'équation qui donne les abscisses des points communs est

$$4x^3 - 27x + 27 = 0 \qquad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 (x + 3) = 0$$

La racine double $\frac{3}{2}$ correspond à un double contact entre les courbes C et Γ aux points A et B d'abscisse $\frac{3}{2}$ et d'ordonnées $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. La racine -3 peut s'interpréter en se plaçant dans le plan $\mathbb{C}^2$; elle correspond à deux points imaginaires conjugués qui sont $\pm i$; ces points sont ceux de Γ où la tangente est perpendiculaire à elle-même.
Du point A, on peut mener à Γ deux tangentes confondues suivant la tangente à Γ et une autres tangente dont le point de contact est un point H. Puisque A est sur la courbe orthoptique C, c'est que AH est la normale en A à Γ ; la droite AH est tangente en H à Γ et normale en A à Γ.

Exercice 3

Soit $y = a\text{ch}x$ l'équation de la chaînette Γ. Prenons pour origine sur Γ le point dont l'abscisse est 0, et orientons Γ dans le sens des x croissants ; évaluons l'abscisse curviligne $s = \overline{\text{arc } AM}$ du point M d'abscisse x.

$$dy = \text{sh } \frac{x}{a} dx \qquad \text{d'où} \qquad ds^2 = dx^2 + \text{sh}^2 \ \frac{x}{a} dx^2 = \text{ch}^2 \ \frac{x}{a} dx^2$$

Puisque $\frac{dy}{dx}$ doit être positif,

$$ds = \text{ch } \frac{x}{a} dx \qquad \text{d'où} \qquad s = \int_0^x \frac{x}{a} dx = a\text{sh } \frac{x}{a}.$$

Soit $r = a(1 + \cos\theta)$ l'équation de la cardoïde Γ ; orientons cette courbe dans le sens des θ croissants. En faisant varier θ de $-\pi$ à $+ : pi$, nous obtenons toute la courbe. Formons

$$dr = -a \sin\theta d\theta, \qquad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 = 3a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta^2$$

et, puisque dans l'intervalle considéré $\cos\frac{\theta}{2}$ reste positif, en supposant a positif, on a

$$ds = 2a \cos\frac{\theta}{2} d\theta.$$

Si nous prenons pour origine sur Γ le point dont l'angle polaire est 0, l'abscisse curviligne du point $M(\theta, r)$ est

$$s = \int_0^\theta 2a \cos\frac{\theta}{2} = 4a \sin\frac{\theta}{2} \qquad (-\pi \leq \theta \leq +\pi)$$

La longueur totale de la cardoïde est donc $8a$.

Exercice 4

On reprend les calculs de la seconde partie de l'exercice 3.
Si ψ est l'angle de OX (défini par son angle polaire θ) avec la tangente orientée,

$$\cos\psi = \frac{dr}{ds} = -\sin\frac{\theta}{2}, \qquad \sin\psi = r\frac{d\theta}{ds} = \cos\frac{\theta}{2},$$

d'où $\psi = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$ à $2k\pi$ près. La tangente orientée a pour angle polaire $\phi = \theta + \psi$

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \frac{3\theta}{2} \mod 2\pi \quad \text{d'où} \quad d\phi = \frac{3}{2}d\theta$$

Donc le rayon de courbure $\mathcal{R}$ est

$$\mathcal{R} = \frac{d\phi}{ds} = \frac{4a}{3}\cos\frac{\theta}{2}.$$

Les composantes scalaires du vecteur MI (qui joint le point $M(\theta)$ au centre de courbure I) sur les axes OX et OY qui ont θ et $\theta + \frac{\pi}{2}$ pour angles polaires sont

$$\frac{-rd\theta}{d\phi} = -\frac{2r}{3} \quad \text{et} \quad \frac{dr}{d\phi} = \frac{-2a\sin\theta}{3}.$$

Les coordonnées de I dans le repère XOY, puis dans le repère xOy, sont successivement par $x = X\cos\theta - Y\sin\theta$ et $y = X\sin\theta + Y\cos\theta$

$$X = -\frac{r}{3}, \qquad Y = \frac{-2a\sin\theta}{3}$$

$$x = \frac{a}{3}(2 + \cos\theta - \cos^2\theta), \qquad y = \frac{a}{3}\sin\theta(1 - \cos\theta)$$

En prenant pour nouvelle origine $O_1 = \left(\frac{2a}{3}, 0\right)$, les coordonnées de I deviennent

$$x_1 = \frac{a}{3}(1 - \cos\theta)\cos\theta), \qquad y_1 = \frac{a}{3}(1 - \cos\theta)\sin\theta)$$

Donc, quand θ varie, I décrit la cardoïde définie par l'équation polaire

$$r_1 = \frac{a}{3}(1 - \cos\theta)$$

relativement au repère dans lequel O_1 est le pôle et O_1x l'axe polaire.

Exercice 5

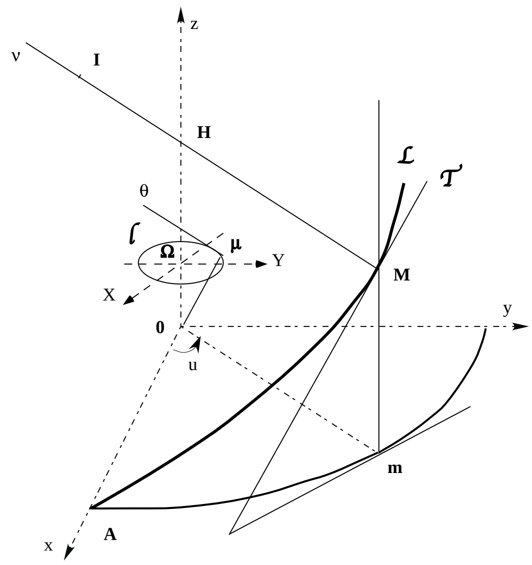
1. Soit $\mathcal{L}$ la courbe donnée par $x = a\cos u$, $y = a\sin u$ et $z = bu$ où a et b sont deux réels positifs dans un repère orthonormé $Oxyz$.
   La projection ℓ de $\mathcal{L}$ sur xOy est le cercle (O, a) et si m est la projection de M (de paramètre u), A le point d'abscisse a sur Ox, on a

$$\overline{\text{arc } AM} = au \quad \text{et} \quad z = bu = \frac{b}{a}\overline{\text{arc } AM}.$$

La cote de M est proportionnelle à l'bscisse curviligne de m sur ℓ ; cette courbe $\mathcal{L}$ est dite hélice circulaire ; elle est tracée sur le cylindre de révolution $\mathcal{C}$ d'axe Oz, de rayon a.
Orientons $\mathcal{L}$ dans le sens des u croissants, et posons $s = \overline{\text{arc } AM}$,

$$dx = -a \sin u du, \qquad dy = a \cos u du, \qquad dz = b du$$

$$\text{d'où} \qquad ds = \sqrt{a^2 + b^2} du.$$



Les cosinus directeurs de la tangente orientée en M sont

$$\left(\overrightarrow{T}\right) \qquad \alpha = \frac{-a \sin u}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \beta = \frac{a \cos u}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Le dernier étant constant, c'est que
– la tangente M_τ à $\mathcal{L}$ fait un angle fixe avec la direction des génératrices du cylindre $\mathcal{C}$,
– l'indicatrice sphérique $/XaJ$, lieu du point μ tel que $\overrightarrow{O\mu} = \overrightarrow{T}$ est un petit cercle de la sphère $(O, 1)$, section de cette sphère par le plan de cote γ ; soit Ω le centre de $\mathcal{J}$, ΩX et ΩY les axes parallèles à Ox, Oy, le point μ a pour angle polaire $u + \pi$; nous orientons $\mathcal{J}$ dans le sens des u croissants :

$$d\alpha = \frac{-a \cos u du}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad d\beta = \frac{-a \sin u du}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad d\gamma = 0$$

$$\text{d'où (}\sigma\text{ étant la l'absciise curviligne de } \mathcal{J} \qquad d\sigma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} du.$$

$$\text{et} \qquad \mathcal{R} = \frac{ds}{d\sigma} = a + \frac{b^2}{a}.$$

La normale principale orientée a pour cosinus directeurs

$$\left(\overrightarrow{N}\right) \qquad \alpha_1 = -\cos u \quad \beta_1 = -\sin u \quad \gamma_1 = 0;$$

la normale principale $M\nu$ est le rayon HM du cylindre $\mathcal{C}$ qui aboutit en M ; elle est orientée à partir de M vers l'axe du cylindre.
Le plan osculateur à $\mathcal{L}$ en M est normal au cylindre. Le centre de courbure I a pour coordonnées

$$\xi = \frac{-b^2}{a}\cos u \quad \eta = \frac{-b^2}{a}\sin u \quad \zeta = bu;$$

on le construit en prolongeant, à partir de l'axe Oz, le rayon MH d'une longueur $HI = \frac{-b^2}{a}$.
Les cosinus directeurs de la binormale orientée $M\beta$ sont

$$\left(\overrightarrow{B}\right) \qquad \alpha_2 = \frac{b\sin u}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \beta_2 = \frac{-b\cos u}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \gamma_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ainsi $\frac{d\alpha_2}{ds} = \frac{\alpha_1}{\mathcal{T}}$ donne $\mathcal{T} = -\frac{a^2+b^2}{b}$ et on a la relation $\mathcal{T} = -\frac{a}{b}\mathcal{R}$.

2. On note par $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ les vecteurs unitaires du repère orthonormé et par $\overrightarrow{u}$ le vecteur unitaire situé dans le plan Oxy et d'angle polaire u. On peut alors écrire

$$\overrightarrow{OM} = \frac{a}{\cos\frac{\theta}{2}}\left(\overrightarrow{u} + \sqrt{3}\,\overrightarrow{k}\right) \tag{2}$$

(la courbe Γ est tracée sur le cône de révolution de sommet O, d'axe Oz et de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{6}$) ; de 2 on déduit, en posant $\frac{d\overrightarrow{u}}{d\theta} = \overrightarrow{p}$,

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta} = \frac{a}{\cos\frac{\theta}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{p} + \sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\overrightarrow{k}\right), \tag{3}$$

relation qui fournit les coordonnées de $\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}$ dans le repère « mobile »$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{p}, \overrightarrow{k}\right)$. D'où

$$\left\|\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}\right\|^2 = \frac{ds^2}{d\theta^2} = \frac{a^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} + 4 + 3\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right) = \frac{a^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

Convenons d'orienter Γ dans le sens des θ croissants :

$$ds = \frac{a}{\cos\frac{\theta}{2}}d\theta \tag{4}$$

En utilisant 3 et 4 nous avons

$$\overrightarrow{T} = \frac{d\overrightarrow{M}}{ds} - \frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}.\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{u} + \cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{p} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{k}$$

D'où, compte-tenu de $\frac{d\overrightarrow{u}}{d\theta} = \overrightarrow{p}$ et $\frac{d\overrightarrow{p}}{d\theta} = -\overrightarrow{u}$,

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{d\theta} = -\frac{3}{4} + \cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{u} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{k}$$

$$\frac{\overrightarrow{dT}}{ds} = \frac{\sqrt{3}}{2a}\cos^2\frac{\theta}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{k}\right) = \frac{\overrightarrow{N}}{\mathcal{R}}$$

Le vecteur $-\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{k}$ étant unitaire, nous pouvons adopter

$$\overrightarrow{N} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{k}, \qquad \mathcal{R} = \frac{2a}{\sqrt{3}\cos^2\frac{\theta}{2}} \tag{5}$$

ce qui revient d'ailleurs à fixer l'orientation de l'indicatrice. $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{N}$ donne $\overrightarrow{B} = \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{u} - \sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{p} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{k}$.
Calculons $\frac{\overrightarrow{dB}}{d\theta} = \frac{3}{4}\sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{u} - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{k}$, et on obtient $\frac{\overrightarrow{dB}}{d\theta} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{N}$.
Il vient

$$\frac{\overrightarrow{dN}}{\mathcal{R}} = \frac{\overrightarrow{dB}}{ds} = -\frac{\sqrt{3}}{2a}\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\overrightarrow{N}$$

soit

$$\overrightarrow{T} = \frac{-2a}{\sqrt{3}\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}. \tag{6}$$

Exercice 6

On considère la courbe C tracée sur la sphère de centre O et de rayon 1.

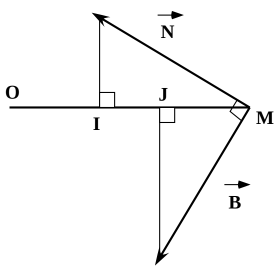
– *On montre d'abord que le vecteur $\overrightarrow{T}$ est tangent à la sphère.* Pour cela, on se donne C en coordonnées sphériques dont le point courant M est

$$x = R\cos\phi(t)\cos\theta(t) \qquad y = R\sin\phi(t)\cos\theta(t) \qquad y = R\sin\theta(t)$$

Le vecteur $\overrightarrow{T}$ est alors colinéaire à $\overrightarrow{\Theta}$

$$\Theta = \begin{cases} -R\sin\phi(t)\cos\theta(t)\phi'(t) - R\cos\phi(t)\sin\theta(t)\theta'(t) \\ R\cos\phi(t)\cos\theta(t)\phi'(t) - R\sin\phi(t)\sin\theta(t)\theta'(t) \\ R\cos\theta(t)\theta'(t) \end{cases}$$

Le calcul du produit scalaire $\overrightarrow{\Theta}.\overrightarrow{OM}$ nous donne comme valeur 0 et donc $\overrightarrow{T}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OM}$.



– *On examine la situation dans le plan orthogonal à $\overrightarrow{T}$ en M.* Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{B}$, étant orthogonaux à $\overrightarrow{T}$, sont dans ce plan. La valeur de IM est celle de $\overrightarrow{\mathbb{N}}.\overrightarrow{OM}$. Pour la calculer, on part de la relation $\overrightarrow{T}.\overrightarrow{OM} = 0$, en supposant *maintenant* qu'on a choisi pour paramètre l'abscisse curviligne s de C. La première formule de Frenet est alors $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{\overrightarrow{N}}{\mathcal{R}}$ où $\mathcal{R}$ est la courbure au point considéré. En outre $\overrightarrow{T}$ est défini par $\overrightarrow{T} = \frac{\overrightarrow{OM}}{ds}$. On a alors

$$\frac{\overrightarrow{T}.\overrightarrow{OM}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{T}}{ds}.\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{T}.\frac{\overrightarrow{OM}}{ds}$$

soit

$$0 = \frac{\overrightarrow{\mathbb{N}}.\overrightarrow{OM}}{\mathcal{R}} + \overrightarrow{T}.\overrightarrow{T}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{T}$ étant unitaire, on obtient

$$\overrightarrow{\mathbb{N}}.\overrightarrow{OM} = -\mathcal{R}.$$

Les triangles IMN et JBM sont égaux (car $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{B}$ sont unitaires). Donc

$$JM^2 = 1 - \mathcal{R}^2 \qquad \text{et donc} \qquad \left(\overrightarrow{B}.\overrightarrow{OM}\right)^2 = 1 - \mathcal{R}^2 \qquad \text{soit}$$

$$\overrightarrow{B}.\overrightarrow{OM} = \pm\sqrt{1-\mathcal{R}^2} \tag{7}$$

– *Il ne reste plus qu'à calculer* $\overrightarrow{B}.\overrightarrow{OM}$. La seconde formule de Frenet s'exprime par $\frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = \frac{\overrightarrow{N}}{\mathcal{T}}$ où $\mathcal{T}$ est la torsion au point considéré. Dérivons l'équation 7 par rapport à l'abscisse curviligne s de C, il vient :

$$\frac{d\overrightarrow{B}.\overrightarrow{OM}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{B}}{ds}.\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{B}.\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = \frac{\overrightarrow{N}}{\mathcal{T}}.\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{B}.\overrightarrow{T} = \frac{\overrightarrow{N}.\overrightarrow{OM}}{\mathcal{T}} = -\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{T}}$$

et aussi

$$\frac{d\left(\pm\sqrt{1-\mathcal{R}^2}\right)}{ds} = \pm\frac{-\mathcal{R}\frac{d\mathcal{R}}{ds}}{\sqrt{1-\mathcal{R}^2}}.$$

On a donc

$$\mathcal{R}\sqrt{1-\mathcal{R}^2} = \mathcal{R}\mathcal{T}\frac{d\mathcal{R}}{ds}$$

soit, en élevant au carré, si $\mathcal{R}$ n'est pas nul,

$$\mathcal{R}^2 + \left(\mathcal{T}\frac{d\mathcal{R}}{ds}\right)^2 = 1.$$