Thèmes abordés

Le théorème du point fixe pour les applications contractantes dans un espace de Banach, un exemple d'espace de Banach fonctionnel, le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, l'exponentielle de matrice, structure de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire. Méthodes pratiques de résolution (solutions DSE, changement variable, variation des constantes...). Exemples d'étude qualitative d'équations différentielles non linéaires.

A. Un théorème du point fixe et le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

1. Un théorème du point fixe

Définition 1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F une application de E dans E.
– On dit que F est contractante s'il existe $k \in]0,1[$ tel que : $\|f(x)-f(y)\| \leqslant k\|x-y\|$ pour tous $x, y \in E$.
– Un point $a \in E$ est un point fixe de F si $F(a) = a$.

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $F : E \to E$ une application contractante et x_0 un point de E. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des approximations successives définie par $x_0 \in E$ et, pour $n \geqslant 0$, $x_{n+1} = F(x_n)$.
   (a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers un point fixe de F.
   (b) Montrer que ce point fixe est unique.
   (c) On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $F^p = \underbrace{F \circ \ldots \circ F}_{p \text{ fois}}$ soit contractante. Montrer que F a un point fixe unique, qui est limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On note $\mathscr{B}(I, E)$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de I dans E muni de la norme par $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in I} \|x(t)\|$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B}(I, E)$ est complet.
   (b) Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer que l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}^n$, noté $\mathscr{C}^0([a, b], E)$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.

2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ une application continue et globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable c-à-d : pour tout segment $K \subset I$, il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall t \in K, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n, \quad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant k\|x-y\|.$$

Soit $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{C}^n$; on s'intéresse au problème de Cauchy :

$$\forall t \in I, \quad x'(t) = f(t, x(t)), \quad \text{et} \quad x(t_0) = x_0 \qquad (\mathbf{P}).$$

On souhaite montrer que $(\mathbf{P})$ admet une solution unique.
Dans les questions 1 à 4, on suppose donnés un segment $I = [a, b]$ $(a < b)$ et une norme quelconque sur $\mathbb{C}^n$. On introduit l'espace $E = \left(\mathscr{C}^0(I, \mathbb{C}^n), \|\cdot\|_\infty\right)$ et l'on considère la transformation $F : E \to E$ définie par :

$$\forall x \in E, \forall t \in I, \quad F(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, \mathrm{d}s.$$

1. Montrer que x est solution de $(\mathbf{P})$ si, et seulement si, $x \in E$ et x est un point fixe de F.
2. Montrer que F est lipschitzienne de rapport $k(b-a)$. Que peut-on en conclure ?
3. Montrer par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x, y \in E,\ \forall t \in I,\ \|F^p(x)(t) - F^p(y)(t)\| \leqslant \dfrac{(k|t-t_0|)^p}{p!}\|x-y\|_\infty$.
   En déduire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que F^p soit contractante.
4. Montrer que $(\mathbf{P})$ admet une unique solution.

5. Étendre le résultat précédent à un intervalle I quelconque. (On pourra écrire I comme réunion de segments).
6. Montrer que le résultat précédent s'applique dans le cas d'un système linéaire : étant données deux fonctions continues $A : I \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $B : I \to \mathbb{C}^n$ alors, pour toute donnée initiale $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{C}^n$, le problème de Cauchy :

$$\forall t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \quad \text{et} \quad X(t_0) = X_0 \qquad (\mathbf{P})$$

admet une solution unique. Que donne la suite des approximations successives lorsque A est constante ?
7. Déduire de ce qui précède que si la fonction $A : I \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est continue, alors l'ensemble des solutions du système linéaire homogène :

$$\forall t \in I, \quad x'(t) = A(t)x(t) \qquad (\mathbf{H})$$

est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

B. Exercices

1 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-^*$ l'équation différentielle $(\mathbf{E})$: $ty' + 2y = \dfrac{t}{1+t^2}$; l'équation $(\mathbf{E})$ possède-t-elle des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

2 Soit l'équation différentielle

$$3(t^2+t)y'' + (8t+3)t' + 2y = 0 \qquad (\mathbf{E}).$$

1. Chercher pour $(\mathbf{E})$ une solution développable en série entière autour de 0 et vérifiant la condition $y(0) = 1$. On précisera l'intervalle I sur lequel la fonction f obtenue est solution.
2. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles. On remarquera que f est la restriction à I d'une fonction $t \mapsto (1+t)^\alpha$ pour un choix convenable de α.
3. Déterminer toutes les solutions de $(\mathbf{E})$. On en donnera l'expression au moyen de fonctions usuelles.

3 On considère l'équation différentielle **(E)** : $\quad x^2y'' + y = 0.$

1. Résoudre sur **(E)** sur $\mathbb{R}_+^*$ grâce au changement de variable $x = \mathrm{e}^t$.
2. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \textbf{(E')}.$$

4 Donner les solutions réelles des systèmes différentiels suivants :

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} x_1' &=& 6x_1 + 3x_2 - 3t + 4e^{3t} \\ x_2' &=& -4x_1 - x_2 + 4t - 4e^{3t} \end{array} \right. \qquad (\mathcal{S}') \left\{ \begin{array}{rcl} x_1' &=& x_1 + 2x_2 \\ x_2' &=& -4x_1 - 3x_2 \end{array} \right. .$$

5 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. En déduire, pour t réel, le calcul de $\exp(tA)$.
2. Résoudre le système différentiel $(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} x_1' &=& 2x_1 + x_3 \\ x_2' &=& x_1 - x_2 - x_3 \\ x_3' &=& -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{array} \right. .$

6 Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et f une solution **non nulle** de l'équation différentielle.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad (\mathbf{E}).$$

1. Montrer que f ne peut avoir de zéro commun avec sa dérivée.
2. Montrer que tout zéro t_0 de f possède un voisinage ouvert V sur lequel f ne s'annule qu'en t_0.
3. Soit S segment de I. Montrer que f ne possède qu'un nombre fini de zéros dans S.
4. Soit φ et ψ deux solutions linéairement indépendantes de $(\mathbf{E})$.
   (a) Montrer que leur wronskien $w = \varphi\psi' - \varphi'\psi$ ne s'annule pas sur I.
   (b) Montrer que φ et ψ n'ont pas de zéros communs.
   (c) Montrer que si φ et ψ sont réelles alors ψ possède un unique zéro dans tout intervalle $]t_0, t_1[$ limité par deux zéros consécutifs de φ (s'il en existe).

$\boxed{7}$

1. (Lemme de Gronwall.) Soit c un réel, $u, v : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u(x) \leqslant c + \int_0^x u(t)\, v(t)\, \mathrm{d}t$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u(x) \leqslant c \exp\left(\int_0^x v(t)\, \mathrm{d}t\right)$.
2. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et intégrable et soit f une solution de l'équation différentielle $(\mathbf{E}) \quad y'' + \big(1 + \varphi(x)\big)y = 0$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $g(x) = f(x) + \int_0^x \sin(x - t)\varphi(t)f(t)\, \mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g''(x) + g(x) = 0$.
   (b) En déduire que toute solution de $(\mathbf{E})$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

C. Le théorème de Cauchy-Lipschitz non-linéaire

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E et $f : I \times \Omega \to E$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. On considère l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) \qquad x' = f(t, x).$$

Soit $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. Une solution de $(\mathbf{E})$ de condition initiale (t_0, x_0) est une application x de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un sous-intervalle J (inconnu) contenant t_0, à valeurs dans Ω, et satisfaisant : $x(t_0) = x_0$ et $x'(t) = f(t, x(t))$ pour tout $t \in J$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme que, pour $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$,
– $(\mathbf{E})$ possède des solutions de condition initiale (t_0, x_0) (existence locale) ;
– si $x_1 : J_1 \to E$ et $x_2 : J_2 \to E$ sont deux solutions alors $x_1 = x_2$ sur $J_1 \cap J_2$ (unicité locale) ;
– il existe un intervalle **ouvert** $J_{\max}$ et une solution $x_{\max} : J_{\max} \to E$ qui est dite solution maximale dans le sens suivant : pour toute solution $x : J \to E$, $J \subset J_{\max}$ et x est la restriction de $x_{\max}$ à J (existence et unicité d'une solution maximale).

D. Exercices

$\boxed{8}$ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ et bornée. Montrer que les solutions maximales de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{9}$ Soit $f : I \to \mathbb{R}$ la solution maximale du problème de Cauchy $\begin{cases} x' & = x^2 + t \\ x(0) & = 1 \end{cases}$.
Montrer que $b = \sup I$ est fini et que $\lim\limits_{t \to b} f(t) = +\infty$.

$\boxed{10}$ Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une solution maximale de l'équation différentielle $x' = x^2 + t^2$.
1. Montrer que f est strictement croissante sur I.
2. On suppose que $\sup I = +\infty$. Montrer qu'alors $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} f'(t) = +\infty$ puis aboutir à une contradiction et conclure que I est majoré.
3. Montrer que l'équation différentielle $x' = x^2 + t^2$ admet une unique solution impaire.