Topologie des evn

1 Autour du théorème de Baire

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réel c-à-d un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$), normé et complet. On notera $B(x,r)$ (resp. $\overline{B}(x,r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon $r > 0$.

1.1 Préliminaires

1. Montrer que l'intersection d'une suite décroissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés bornés de E dont la suite des diamètres tend vers 0 est non vide.
2. Montrer qu'un sous espace strict F de E, de dimension finie, est fermé d'intérieur vide.

1.2 Le théorème de Baire

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de E denses dans E. On se propose de montrer que $\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$ est dense dans E. Soit alors $B(x_0, r_0)$ une boule ouverte de E.

1. Construire une suite décroissante de boules $(B(x_n, r_n))_{n\geq 1}$ telle que :
$$\forall n \geq 1, \qquad \overline{B}(x_n, r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap U_{n-1} \quad \text{avec} \quad 0 < r_n < \frac{r_{n-1}}{2}.$$
2. Montrer que $B(x_0, r_0) \bigcap \Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n \Big) \neq \varnothing$.
3. En déduire le théorème de Baire.
4. Montrer qu'une union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

1.3 Une application du théorème de Baire : le lemme de Croft

Soit f une fonction continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\lim_{n\to+\infty} f(nx) = 0$. En considérant l'ensemble :
$$F_N = \{x \in \mathbf{R}_+^* \mid \forall p \geq N,\ |f(px)| \leqslant \varepsilon\}$$
et en appliquant le théorème de Baire, montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1.4 L'espace des polynômes

Pour tout polynôme $P = a_0 + a_1 X + \dots a_n X^n \in \mathbf{C}[X]$, on pose : $\|P\| = \sup_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|$.

1. (a) Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathbf{C}[X]$.
   (b) Montrer que la boule unité (pour la norme ci-dessus) n'est pas compacte.
   (c) En considérant la suite des polynômes $P_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{X^k}{2^k}$, montrer que $\mathbf{C}[X]$ n'est pas complet (pour la norme ci-dessus).
   (d) En remarquant que $\mathbf{C}[X]$ est réunion de ses sous espaces $\mathbf{C}_n[X]$ $(n \in \mathbb{N})$, montrer, en appliquant le théorème de Baire, qu'aucune norme ne peut rendre $\mathbf{C}[X]$ complet.
2. L'endomorphisme de dérivation $\Delta : P \in \mathbf{C}[X] \mapsto P'$ est-il continu ?
3. Soit $a \in \mathbf{C}$ tel que $|a| < 1$.
   (a) Montrer que l'application linéaire $\varphi : P \in \mathbf{C}[X] \mapsto P(a)$ est continue.

(b) Montrer que la norme subordonnée de φ est inférieur à $\dfrac{1}{1-|a|}$.

(c) En considérant la suite des polynômes $P_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{\bar{a}^k}{|a|^k} X^k$, montrer que la norme subordonnée de φ est en fait égale $\dfrac{1}{1-|a|}$.

2 Projection orthogonale dans un espace de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert, c-à-d un espace préhilbertien réel complet. On note $< , >$ son produit scalaire.

2.1 Le cas d'une partie convexe C

Soit C un convexe fermé, non vide de H. Pour tout $x \in H$, on note dist $(x, C) = \inf\limits_{y \in C} \|x - y\|$ la distance de x à C.

1. Vérifier l'identité du parallélogramme : pour tous u, v éléments de H,
$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$
2. Soit (x_n) une suite d'éléments de C telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - x_n\| = \text{dist}\,(x, C)$.
   (a) Montrer que $\|x_n - x_m\|^2 = 2\|x - x_n\|^2 + 2\|x - x_m\|^2 - \|2x - x_n - x_m\|^2$.
   (b) En déduire que la suite (x_n) converge vers un point $\bar{x} \in C$ vérifiant $\|x - \bar{x}\| = \text{dist}\,(x, C)$.
   (c) Montrer que $\bar{x}$ est le seul point de C vérifiant cette égalité.
   (d) Montrer que pour tout $z \in C$, $< x - \bar{x}, z - \bar{x} > \leqslant 0$ et que cette inégalité caractérise $\bar{x}$ parmi tous les éléments de C.
3. Dans toute la suite on note $P_C(x) = \bar{x}$ et on appelle projection de x sur le convexe C cet élément. Montrer que pour tous $x, y \in H$, $\|P_C(x) - P_C(y)\| \leqslant \|x - y\|$.

2.2 Le cas d'un sous espace M

Soit M un sous-espace vectoriel fermé de H. On note $M^\perp$ l'orthogonal de M défini par
$$M^\perp = \{y \in H;\ \forall x \in M,\ < x, y >= 0\}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in H$, $x - P_M(x) \in M^\perp$.
2. Montrer que $M \oplus M^\perp = H$.
3. Montrer que l'application P_M est linéaire continue de norme 1.

2.3 Formes linéaires continues sur H

Soit φ une forme linéaire non nulle continue sur H. On se propose de montrer qu'il existe un unique $u \in H$ tel que
$$\forall x \in H, \quad \varphi(x) =< x, u > .$$

1. Montrer que $(\ker \varphi)^\perp$ est une droite vectorielle engendrée par un vecteur a de norme 1.
2. Montrer qu'il existe un unique $u \in \mathbf{R}a$ tel que : $\varphi(a) =< a, u >$.
3. Utiliser ce vecteur u pour conclure.
4. Montrer que $\|\varphi\| = \|u\|$.

tewfik.lahcene@free.fr