Notations

- $\mathscr{L}(\mathbf{C}^n)$ est l'espace des endomorphismes de $\mathbf{C}^n$;
- σ_u est le spectre d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^n)$ et $\rho(u)$ son rayon spectral ; il est défini par :

$$\rho(u) = \max\{|\lambda| \,;\, \lambda \in \sigma_u\};$$

- $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est l'espace vectoriel des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbf{C}$;
- σ_A est le spectre de la matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $\rho(A)$ son rayon spectral ; il est défini par :

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \,;\, \lambda \in \sigma_A\};$$

- A^* est la matrice adjointe de la matrice A ; elle est définie par $A^* = {}^t\overline{A}$;
- les normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont les normes usuelles sur $\mathbf{C}^n$, définies respectivement par :

$$\|x\|_\infty = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|\,, \qquad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|\,, \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}.$$

1 Norme subordonnée d'un endomorphisme

A toute norme $\|\cdot\|$ définie sur $\mathbf{C}^n$ on associe une norme sur $\mathscr{L}(\mathbf{C}^n)$ (dite norme **subordonnée** à la norme $\|\cdot\|$) en posant, pour $u \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^n)$:

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|\,.$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi une norme sur $\mathscr{L}(\mathbf{C}^n)$ et que l'on a :

$$\forall u \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^n), \qquad \|u\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \inf\{M \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbf{C}^n,\ \|u(x)\| \leqslant M\,\|x\|\}\,.$$

2. Vérifier que $\|u \circ v\| \leq \|u\|\,\|v\|$.
3. Quelle est la norme de l'identité de $\mathbf{C}^n$?
4. Montrer que $\rho(u) \leq \|u\|$ et que $\rho(u^p) = \rho(u)^p$.

2 Normes matricielles subordonnées

1. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^n)$, $\mathscr{B}$ une base de $\mathbf{C}^n$ et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de u dans $\mathscr{B}$.
   (a) Montrer que, si l'on munit $\mathbf{C}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, alors $\|u\| = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|$.
   (b) Calculer de même la norme de u, lorsque $\mathbf{C}^n$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

2. L'espace $\mathbf{C}^n$ étant muni d'une norme, la norme subordonnée d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est, par définition, la norme (subordonnée) de l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à A.
   On munit $\mathbf{C}^n$ de la norme $\|\cdot\|_2$.
   (a) Montrer que si A est hermitienne ($A = A^*$) alors $\|A\|_2 = \rho(A)$.
   (b) Montrer que l'on a toujours $\|A\|_2 = (\rho(A^*A))^{1/2}$.

3. Pour $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ on pose $\|A\| = \left(\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$ (norme de Frobenius).
   (a) Montrer que la relation précédente définit bien une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et que l'on a :

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}),\ \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|.$$

   (b) Montrer que la norme de Frobenius n'est pas une norme subordonnée.
   (c) Montrer que deux matrices unitairement semblables ont même norme.

3 Rayon spectral

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^n)$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbf{C}^n$.

1. On suppose que la matrice $T = (t_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ de u dans la base $\mathscr{B}$ est triangulaire supérieure. Soit $\delta \in \mathbf{C}^*$; quelle est la matrice de u dans la base $\mathscr{B}_\delta = (\delta e_1, \delta^2 e_2, \ldots, \delta^n e_n)$?
2. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une norme subordonnée telle que, $\|u\| \leqslant \rho(u) + \epsilon$. (Indication : on pourra se servir d'une base de trigonalisation, de la question précédente ainsi que de la norme $\|\cdot\|_\infty$).
3. Montrer l'équivalence $u^p \to 0 \iff \rho(u) < 1$.
4. Montrer que, pour toute norme subordonnée, la suite $\|u^p\|^{1/p} \to \rho(u)$. (Indication : on pourra considérer l'endomorphisme $\dfrac{u}{\rho(u) + \epsilon}$).
5. Montrer que le résultat précédent est vrai pour une norme quelconque sur $\mathscr{L}(\mathbf{C}^n)$.

4 Topologie dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$

1. Montrer que l'application déterminant est continue de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$.
2. Montrer que $GL_n(\mathbf{C})$ (groupe des matrices inversibles) est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.
3. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.
4. En utilisant un argument de densité montrer que les matrices AB et BA ont même polynôme caractéristique ainsi que le théorème de Cayley-Hamilton.