Correction du devoir du 21-09-05

avec M. Laffont

1. $\sim$ est :
   - réflexive : $A = I^{-1}AI$.
   - symétrique : $A = P^{-1}BP \iff PAP^{-1} = B \iff B = Q^{-1}AQ$, avec $Q = P^{-1}$.
   - transitive : si $A = P^{-1}BP$ et $B = Q^{-1}CQ$, alors $A = (QP)^{-1}C(QP)$, et $PQ \in GL_3(\mathbb{R})$ (ce dernier ensemble est un groupe).

2. On rappelle que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Donc, si A est semblable à B, $A = P^{-1}BP$, on a :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(P)\det(B)\det(P^{-1})\\ &= \det(B).\end{aligned}$$

Deux matrices qui ont des déterminants distincts ne sont pas semblables (on dit que le déterminant est un invariant de similitude).

3.a. Soit $y \in Im(w)$. Il existe x dans $\ker u^{i+j}$ tel que $y = u^j(x)$. Mais alors, $u^i(y) = u^{i+j}(x) = 0$, et donc $Im(w) \subset \ker u^i$.

3.b. D'après le théorème du rang,

$$\dim(Im(w)) + \dim(\ker w) = dim(\ker u^{i+j}).$$

Puisque $\dim(Im(w)) \leq \dim(\ker u^i)$ et $\dim(\ker w) \leq \dim(\ker u^j)$ (il est facile de constater que $\ker w \subset \ker u^j$), on a le résultat.

4.a. On applique 3.b. pour $i = 2$, $j = 1$:

$$3 = \dim(\ker u^3) \leq \dim(\ker u) + \dim(\ker u^2).$$

Par le théorème du rang, $\dim(\ker u) = 1$, et $\dim(\ker u^2) \geq 2$. On applique ensuite 3.b. pour $i = j = 1$:

$$\dim(\ker u^2) \leq \dim(\ker u) + \dim(\ker u) = 2.$$

4.b. D'après la question précédente, $u^2 \neq 0$, et il existe a de E tel que $u^2(a) \neq 0$. Montrons que la famille $(a,u(a),u^2(a))$ est libre : si on avait une égalité du type

$$\lambda_0 a + \lambda_1 u(a) + \lambda_2 u^2(a) = 0,$$

on compose d'abord par u^2 :

$$\lambda_0 u^2(a) = 0 \implies \lambda_0 = 0.$$

Puis on compose par u :

$$\lambda_1 u^2(a) = 0 \implies \lambda_1 = 0.$$

On obtient aussi finalement $\lambda_2 = 0$. Puisque E est de dimension 3, la famille $(a,u(a),u^2(a))$ est a fortiori une base.

4.c. On a :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.a. Puisque $u \neq 0$ (son rang n'est pas nul), il existe b de E tel que $u(b) \neq 0$.

5.b. Puisque $\ker u$ est de dimension 2, il existe c vecteur de $\ker u$ non colinéaire à $u(b)$ et donc $(u(b),c)$ est une famille libre de $\ker u$. Il suffit ensuite de prouver que $(b,u(b),c)$ est libre : si on a une égalité du type

$$\lambda_0 b + \lambda_1 u(b) + \lambda_2 c = 0,$$

on compose par u pour obtenir

$$\lambda_0 u(b) = 0 \implies \lambda_0 = 0.$$

Puisque $(u(b),c)$ est libre, on en déduit ensuite que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. $(b,u(b),c)$ est bien une base de E.

5.c. On a :

$$U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } V' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. A est inversible car son déterminant est le même que celui de la matrice T (cf question 2.), et vaut donc 1.

7. On a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ N^3 = 0.$$

On a alors : $P^{-1}A^{-1}P = T^{-1} = (I_3 + N)^{-1}$. Or,

$$(I_3 - N + N^2)(I_3 + N) = (I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 + N^3 = I_3.$$

Ceci prouve que

$$(I_3+N)^{-1}=I_3-N+N^2,$$

ce qui à son tour donne le résultat demandé.

8. A et A^{-1} sont alors toutes les deux semblables à I_3. Comme être semblable est une relation d'équivalence, elles sont semblables.

9.a. Soit u l'endomorphisme associé à N dans la base canonique. D'après la question 4., il existe une base de E telle que la matrice de u dans cette base est :

$$U=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On conclut car deux matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes sont semblables (cf le théorème sur les effets d'un changement de base sur un endomorphisme). Une matrice semblable à M est alors :

$$V=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9.b. En utilisant la formule du binôme de Newton (les matrices N et N^2 commutent), on vérifie aisément que $M^3=0$. En outre, le rang de M est aussi le rang de V et vaut donc 2.

9.c. Puisque le rang de M est 2, et $M^3=0$, le même raisonnement que celui effectué pour N prouve que M est semblable à U. Comme on a déjà prouvé que N est semblable à U, M et N sont semblables.

9.d. Soit Q tel que $Q^{-1}MQ=N$. On a :

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= I_3+N \\ &= I_3+Q^{-1}MQ \\ &= Q^{-1}(I_3+M)Q \\ &= Q^{-1}P^{-1}A^{-1}PQ. \end{aligned}$$

A et A^{-1} sont semblables.

10. Inspirés par la question 9., on vérifie que $M=N^2-N$ est de rang 1, et vérifie $M^2=0$. On prouve alors que M et N sont toutes semblables à la matrice U', et donc semblables l'une à l'autre. On conclut comme à la question 9.d.

11.a. Bien sûr, le noyau d'un endomorphisme de E est un sous-vectoriel de E. On a :

$$\begin{aligned} xa+yb+zc\in\ker(u-id_E) &\iff \begin{cases} -y-z &= 0 \\ y+z &= 0 \end{cases} \\ &\iff y+z=0 \\ &\iff \begin{cases} x = x & \\ y = & y \\ z = & -y \end{cases} \end{aligned}$$

$\ker(u-id_E)$ est donc un sous-espace vectoriel de dimension 2, dont une base est donnée par (e_1,e_2) avec $e_1=a$ et $e_2=b-c$.

11.b. (e_1,e_2,c) est une base de E, car on peut vérifier aisément que c'est une famille libre (on peut aussi calculer le déterminant de cette famille dans la base (a,b,c) et vérifier qu'il est non nul - il fait 1). On a :

$$u(e_1)=e_1,\ u(e_2)=e_2,\ u(c)=-b+2c=-e_2+c.$$

Dans la nouvelle base, la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11.c. La matrice A est une matrice semblable à une matrice du type T : elle est donc semblable à son inverse.

12. Non! On peut par exemple choisir $A=-I_3$. On a alors $A^{-1}=A=I_3$, et $A\sim A^{-1}$. Pourtant, A n'est pas semblable à une matrice de type T car elles n'ont pas le même déterminant.

Polynômes : ex3

1. (**rappels** : $j^3 = 1$ donc $j^4 = j$, $1 + j + j^2 = 0$ ……)

$\left|\begin{array}{l} \alpha + \beta = x_1 \\ \alpha j + \beta j^2 = x_2 \end{array}\right.$ est un système de deux équations à deux inconnues dont le déterminant n'est pas nul (système de Cramer) donc

$\left|\begin{array}{l} \alpha + \beta = x_1 \\ \alpha j + \beta j^2 = x_2 \\ \alpha j^2 + \beta j = x_3 \end{array}\right.$ admet des solutions si et seulement si $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ j & j^2 & x_2 \\ j^2 & j & x_3 \end{vmatrix} = 0$ ce qui donne après simplification $x_1 + x_2 + x_3 = 0$;

mais $x_1 + x_2 + x_3 = -a$ (relations entre coefficients et racines d'un polynôme) donc……………

2. développer et simplifier en utilisant les propriétés de j , rappelées au début.

3. on sait que $x' + x'' = q$ et $x'x'' = p^3/27$ et que dans **C,** tout complexe admet trois racines cubiques ; soit α_1 une racine cubique de x' et β_1 une racine cubique de x'' alors les racines cubiques de x' sont α_1, $\alpha_2 = j\alpha_1$, $\alpha_3 = j^2\alpha_1$ et celles de x'' sont β_1, $\beta_2 = j\beta_1$, $\beta_3 = j^2\beta_1$; on en déduit que pour tout i et tout j ,

$\alpha_i^3 = x'$, $\beta_j^3 = x''$, $\alpha_i^3 + \beta_j^3 = q$ et $\alpha_i^3 \beta_j^3 = p^3/27$ donc $3\alpha_i \beta_j \in \{ p, pj, pj^2 \}$;

- Si $3\alpha_1\beta_1 = p$ alors par exemple $\alpha = \alpha_1$ et $\beta = \beta_1$ conviennent.
- Si $3\alpha_1\beta_1 = pj$ alors par exemple $\alpha = \alpha_2$ et $\beta = \beta_2$ conviennent.
- Si $3\alpha_1\beta_1 = pj^2$ alors par exemple $\alpha = \alpha_1$ et $\beta = \beta_2$ conviennent.

4. On pose $X = x+1$ pour obtenir une équation sans terme de degré 2 (même idée que pour la mise sous forme canonique du trinôme du 2èmè degré) ; on obtient ainsi l'équation $X^3 - 2X^2 - 2 = 0$ d'où $p = q = 2$.

L'équation $X^2 - 2X + 8/27 = 0$ admettant deux racines réelles , α et β sont les racines cubiques de ces deux racines. (formules de CARDAN) ; remarque : lorsque le trinôme a des racines complexes , la recherche des racines cubiques de ces dernières conduit à des équations de degré 3 !!!