Séance du 21 / 06 / 06 avec M. Laffont

suites récurrentes.

Exercice 1

On s'intéresse aux suites vérifiant la relation de récurrence (R) : $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$

1) Pour tout entier naturel n , soit $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$
   a. Démontrer que la suite (u_n) vérifie la relation (R) .
   b. Démontrer que la suite (u_n) converge vers 0 .
   c. En utilisant la relation de récurrence (R), dresser à l'aide d'une calculatrice, la table des 25 premiers termes de la suite (u_n).
2) Soit (v_n) une autre suite vérifiant (R)
   a. Démontrer que pour tout n , $v_n = u_n + (n\,!)(v_0 - u_0)$.
   b. Expliquer le phénomène constaté au 1 c.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = \dfrac{6}{2 + x^2}$

1) Etudier les variations de f.
2) En déduire que $f([1 ; 2]) = [1 ; 2]$.
3) Démontrer que f admet un unique point fixe ξ .
4) Déterminer les points fixes de $g = f \circ f$.
5) Etudier la suite (x_n) définie par son premier terme $x_0 = \dfrac{3}{2}$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$.

Exercice 3

Soit J un segment de IR et g une application de J vers J ; on suppose que pour tout couple (x ; y) d'éléments de J, $x \neq y$ entraîne $|g(x) - g(y)| < |x - y|$.

1) Justifier la continuité de $h : x \to |g(x) - x|$; en déduire que h admet un minimum absolu.
2) Démontrer que g admet un unique point fixe ξ .
3) On considère une suite (x_n) définie par son premier terme $x_0 \in J$ et $x_{n+1} = g(x_n)$.
   Démontrer que la suite de terme général $y_n = |x_n - \xi|$ converge.
4) Démontrer que la suite (x_n) converge vers ξ .

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{2}$

1) Démontrer que pour tout couple (x ; y) d'éléments de IR,
   $x \neq y$ entraîne $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.
2) Etudier la suite (x_n) définie par son premier terme x_0 et la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$.

Exercice 5

1) Soit J un intervalle fermé et g une application de J vers J ; on suppose qu'il existe $K \in [0\,;1[$ tel que pour tout couple (x ;y) d'éléments de J, $|g(x) - g(y)| \leq K|x - y|$; on considère une suite (x_n) définies par : $x_0 \in J$ et $x_{n+1} = g(x_n)$
   a. Démontrer que (x_n) est une suite de Cauchy.
   b. En déduire que g possède un unique point fixe ξ vers lequel (x_n) converge.
   c. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $|x_n - \xi| \leq \dfrac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0|$
2) Soit g une application de classe C^1 d'un intervalle ouvert I vers IR ; on suppose que g possède un point fixe ξ et que $|g'(\xi)| < 1$.
   a. Démontrer qu'il existe $K \in [0\,;1[$ et $\varepsilon > 0$ tels que :
      $[\xi - \varepsilon\,; \xi - \varepsilon] \subseteq I$ et pour tout $x \in [\xi - \varepsilon\,; \xi - \varepsilon]$, $|g'(x)| \leq K$.
   b. Soit $J = [\xi - \varepsilon\,; \xi - \varepsilon]$; démontrer que $g(J) \subseteq J$.
   c. Démontrer que toute suite (x_n) définie par $x_0 \in J$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers ξ .
3) Soit g une application de classe C^q ($q \geq 2$) d'un intervalle ouvert I vers IR ; on suppose que g possède un point fixe ξ et que toutes les dérivées de g jusqu'à l'ordre q – 1 sont nulles en ξ .
   a. Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute suite (x_n) définie par $x_0 \in [\xi - \varepsilon\,; \xi - \varepsilon]$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers ξ .
   b. Si pour tout n $x_n \neq \xi$, démontrer que $\lim \dfrac{x_{n+1} - \xi}{(x_n - \xi)^q} = \dfrac{g^{(q)}(\xi)}{q!}$.
   c. Démontrer l'existence d'un réel C tel que pour tout n, $|x_{n+1} - \xi| \leq C|x_n - \xi|^q$.
   d. En déduire l'existence d'un réel D tel que $|x_n - \xi| \leq \dfrac{1}{D}\left(D|x_0 - \xi| \right)^{q^n}$.