Séance du 25/11/09 avec M. Laffont : suites récurrentes.

Exercice 1

1) **<u>Théorème du point fixe</u>** :

Soit J un intervalle fermé et g une application de J vers J ; on suppose qu'il existe $K \in [0 ; 1[$ tel que pour tout couple (x ; y) d'éléments de J, $|g(x) - g(y)| \le K|x - y|$;

On considère une suite (x_n) définie par : $x_0 \in J$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$ $x_{n+1} = g(x_n)$

a. Démontrer que (x_n) est une suite de Cauchy.

b. En déduire que g possède un unique point fixe ξ vers lequel (x_n) converge.

c. Démontrer que pour tout $n \ge 1$, $|x_n - \xi| \le \dfrac{K^n}{1-K} | x_1 - x_0|$

2) **<u>Point fixe attractif</u>** :

Soit g une application d'un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, de classe C^p ($p \ge 1$) ;

On suppose que g possède un point fixe ξ, et que $| g'(\xi) | < 1$.

a. Démontrer qu'il existe un intervalle $J = [\xi - \alpha ; \xi + \alpha]$, inclus dans I, d'intérieur non vide, tel que toute suite (x_n) définie par : $x_0 \in J$ et pour tout n $x_{n+1} = g(x_n)$, converge vers ξ.

On suppose que $\{k \in [\![1 ; p]\!] \,/\, g^{(k)}(\xi) \neq 0\}$ n'est pas vide ; soit $q = \inf \{k \in [\![1 ; p]\!] \,/\, g^{(k)}(\xi) \neq 0\}$ et soit une suite (x_n) définie par : $x_0 \in J$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.

b. Si (x_n) est non stationnaire, démontrer que $\dfrac{x_{n+1} - \xi}{(x_n - \xi)^q} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{g^{(q)}(\xi)}{q!}$.

c. Démontrer l'existence d'un réel C tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|x_{n+1} - \xi| \le C|x_n - \xi|^q$.

d. On suppose $q \ge 2$; Démontrer que $|x_n - \xi| \le \dfrac{1}{D} \left(D|x_0 - \xi| \right)^{q^n}$ où $D = C^{\frac{1}{q-1}}$.

3) **<u>Cas où</u> $g'(\xi) = 1$**

Soit g une application d'un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, de classe C^p ($p \ge 2$);

On suppose que g possède un point fixe ξ, que $g'(\xi) = 1$ et que $\{k \in [\![2 ; p]\!] \,/\, g^{(k)}(\xi) \neq 0\} \neq \phi$.

Soit $q = \inf \{k \in [\![2 ; p]\!] \,/\, g^{(k)}(\xi) \neq 0\}$ et soit $(x_n)_n$ une suite non stationnaire, définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$, convergeant vers ξ.

a. Démontrer que : $$(x_{n+1} - \xi)^{1-q} = (x_n - \xi)^{1-q} + (1-q)\frac{g^{(q)}(\xi)}{q!} + o(1).$$

b. En déduire un équivalent de $| x_n - \xi |$.

Exercice 2 : un autre théorème du point fixe.

Soit J un segment de $\mathbf{R}$ et g une application de J vers J ; on suppose que pour tout couple (x ; y) d'éléments de J : $x \neq y$ entraîne $|g(x) - g(y)| < |x - y|$.

1) Justifier la continuité de $h : x \to |g(x) - x|$.
2) Démontrer que g admet un unique point fixe ξ.
3) On considère une suite (x_n) définie par : $x_0 \in J$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$;
   Démontrer que la suite de terme général $y_n = |x_n - \xi|$ converge.
4) Démontrer que la suite (x_n) converge vers ξ.

Exercice 3

On considère une suite (x_n) définie par la relation : $x_0 \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$ et pour tout n, $x_{n+1} = \sin(x_n)$.

1) Démontrer que (x_n) converge vers 0 .
2) Déterminer un équivalent de x_n .

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{2}$

1) Démontrer que pour tout couple (x ; y) d'éléments de **R** :

$$x \neq y \text{ entraîne } |f(x) - f(y)| < |x - y| .$$

2) Etudier la suite (x_n) définie par son premier terme x_0 et la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$.

Exercice 5

Méthode de Newton, suites de Héron d'Alexandrie

Soit a appartenant à $\mathbf{N}^*$ et soit p la partie entière de $\sqrt{a}$; nous allons étudier la suite récurrente $(x_n)_n$, de premier terme $x_0 = p+1$, obtenue en appliquant la méthode de Newton (ou méthode des tangentes) à la fonction $f : x \to x^2 - a$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$

1) vérifier que l'intervalle $I = [\sqrt{a} ; p+1]$ est stable par g et que pour tout n , $x_{n+1} = g(x_n)$.
2) démontrer que pour tout n, $0 \leq x_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$
3) en déduire que pour tout n, $0 \leq x_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\frac{x_0 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}$
4) démontrer que pour tout n, $0 \leq x_n - \sqrt{a} \leq \left(\frac{1}{2p}\right)^{2^n - 1}$

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = \frac{6}{2 + x^2}$

1) Etudier les variations de f .
2) En déduire que $f([1 ; 2]) = [1 ; 2]$.
3) Démontrer que f admet un unique point fixe ξ .
4) Déterminer les points fixes de $g = f \circ f$.
5) Etudier la suite (x_n) définie par son premier terme $x_0 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$.

Exercice 7

On s'intéresse aux suites vérifiant la relation de récurrence (R) : $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$

1) Pour tout entier naturel n , soit $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$
   a. Démontrer que la suite (u_n) vérifie la relation (R) .
   b. Déterminer u_0 puis, en utilisant la relation de récurrence (R), à l'aide d'une calculatrice dresser la table des 25 premiers termes de la suite (u_n) .
   c. Démontrer que la suite (u_n) converge vers 0 .
2) Soit (v_n) une autre suite vérifiant (R)
   a. Démontrer que pour tout n , $v_n = u_n + (n!)(v_0 - u_0)$.
   b. Expliquer le phénomène constaté au 1.

Séance du 16/09/09 : fin de correction

Exercice 4

3.b. Soit $E = \{a_1 ; a_2 ; \ldots\ldots\ldots a_n\}$ un ensemble de n éléments et pour tout k allant de 1 à n , soit A_k l'ensemble des permutations de E laissant au moins a_k invariant alors $d_n = n\,! - \left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right|$;

Or $\sum |A_k| = n\,(n-1)!$, $\sum |A_j \cap A_k| = \binom{n}{2}(n-2)!$, $\sum |A_j \cap A_k \cap A_l| = \binom{n}{3}(n-3)!$ ………etc …… d'où la valeur de d_n directement grâce à la formule du crible.

Exercice 5

Soit $E = \{a_1 ; a_2 ; \ldots\ldots\ldots a_n\}$ un ensemble de n éléments et $F = \{b_1 ; b_2 ; \ldots\ldots b_p\}$ un ensemble de p éléments ; pour tout k allant de 1 à p , soit A_k l'ensemble des applications de E vers F, n'atteignant pas b_k alors $S(n ; p) = p^n - \left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right|$; or $\sum |A_k| = p\,(p-1)^n$, $\sum |A_j \cap A_k| = \binom{p}{2}(p-2)^n$, $\sum |A_j \cap A_k \cap A_l| = \binom{p}{3}(p-3)^n$,

……… etc …… d'où la valeur de $S(n ; p)$ grâce à la formule du crible.