Séance du 21/01/09 avec M. Laffont

Soit I un intervalle d'intérieur non vide]a ; b[(fermé ou non, borné ou non) et soit ω une fonction de classe C^{∞}, strictement positive sur I ; On note F l'ensemble des fonctions polynômes de I vers $\mathbf{R}$, F_n l'ensemble des fonctions polynômes de degrés inférieur ou égal à n , E l'espace vectoriel des fonctions continues f, de I vers $\mathbf{R}$, telles que $f^2\omega$ est intégrable sur I , muni du produit scalaire $(f / g) = \int_a^b f(t)g(t)\omega(t)dt$
et on suppose que l'espace vectoriel F des fonctions polynômes est inclus dans E.

A) Polynômes orthogonaux de E .

1. Démontrer qu'il existe une suite orthonormale (R_n) de fonctions polynômes, telle que : pour tout $n\in \mathbf{N}$, $\deg R_n = n$.
2. Démontrer qu'une suite (P_n) de fonctions polynômes telle que, pour tout $n\in \mathbf{N}$, $\deg P_n = n$, est orthogonale si et seulement si , pour tout $n\in \mathbf{N}$, il existe $a_n\in \mathbf{R}^*$ tel que $P_n = a_nR_n$.
3. Soit (P_n) une telle suite orthogonale, montrer que pour tout n, P_n admet n racines distinctes dans] a ; b [.
4. On suppose que I est le segment [-1 ; 1] ; soit π_n la projection orthogonale sur F_n .
   a. Démontrer que pour tout $f \in$ E, la suite $(\pi_n(f))$ converge vers f.
   (on pourra utiliser le théorème de Stone-Weirstrass) .
   b. Démontrer que E n'est pas complet .

B) Polynômes orthogonaux classiques

On suppose de plus que :

- il existe σ et ρ fonctions polynômes telles que $\deg\sigma \leq 2$, $\deg \rho = 1$ et $(\sigma\,\omega)' = \rho\,\omega$.
- Pour tout $n\in \mathbf{N}^*$ et tout $P\in F$, $\lim\limits_{x\to a} P(x)\,(\sigma(x))^n\,\omega(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to b} P(x)\,(\sigma(x))^n\,\omega(x) = 0$.

1. Montrer que pour tout $(n ; k)\in \mathbf{N}^2$ tel que $k \leq n$, il existe $Q_k \in F_k$ telle que : $(\sigma^n\omega)^{(k)} = Q_k\,\omega\,\sigma^{n-k}$.

On note P_n la fonction polynôme vérifiant l'égalité : $(\sigma^n\omega)^{(n)} = P_n\,\omega$

2. Montrer que pour tout $n\in \mathbf{N}^*$ et toute fonction $P \in F_{n-1}$, $\int_a^b P(t)P_n(t)\omega(t)dt = 0$.
3. On suppose que pour tout $n\in \mathbf{N}$, P_n est non nulle ; démontrer que (P_n) une suite orthogonale de fonctions polynômes telle que, pour tout n, $\deg P_n = n$.
4. Démontrer que pour tout $n\in \mathbf{N}$: $\sigma P_n'' + \rho\, P_n' - \left(n\rho' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''\right) P_n = 0$.
5. ***Quelques exemples*** : Montrer que les fonctions ω, σ, ρ suivantes, vérifient toutes les hypothèses des questions précédentes.
   a. ***Polynômes de Legendre*** : I = [-1 ; 1] ; pour tout x de I, $\omega(x) = 1$, $\sigma(x) = x^2 - 1$, $\rho(x) = 2x$.
   b. ***Polynômes de Hermite*** : I = $\mathbf{R}$; pour tout x de I , $\omega(x) = e^{-x^2}$, $\sigma(x) = 1$, $\rho(x) = -2x$.
   c. ***Polynômes de Jacobi*** : I =]-1 ;1[, $\alpha > -1$, $\beta > -1$; $\omega(x) = (1-x)^{\alpha}(x+1)^{\beta}$, $\sigma(x) = 1 - x^2$,
   $\rho(x) = \beta - \alpha - x(2+\alpha+\beta)$.
   d. ***Polynômes de Laguerre*** : I =] 0 ;$+\infty$ [, $\alpha > -1$; $\omega(x) = x^{\alpha}e^{-x}$, $\sigma(x) = x$, $\rho(x) = (-x+1+\alpha)$.

C) Application : *Quadrature de Gauss*

Soit (P_n) une suite orthogonale de fonctions polynômes telle que, pour tout n, deg $P_n = n$.

1. Pour tout entier $n \geq 2$ et tout entier j tel que $1 \leq j \leq n$, soit $L_{n,j}$ le j ième polynôme de Lagrange relatif aux racines $r_{n,1}$, $r_{n,2}$, ….$r_{n,n}$ de P_n ; démontrer que pour toute fonction polynôme $Q \in F_{2n-1}$,
$$\int_a^b Q(t)\omega(t)dt = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j}\, Q(r_{n,j}) \quad \text{où} \quad \lambda_{n,j} = \int_a^b L_{n,j}(t)\omega(t)dt .$$

2. Démontrer que pour tout (n , j) $\lambda_{n,j} > 0$ et que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j} = \int_a^b \omega(t)dt$.

3. On suppose que I est le segment [a ; b] ; soit $f \in E$, montrer que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j} f(r_{n,j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\omega(t)dt$

   (on pourra utiliser le théorème de Stone-Weirstrass) .

4. On suppose que I = [-1 ; 1] et que $\omega = 1$; soit f de classe C^6 sur I.
   a. déterminer les racines r_1, r_2 et r_3 de P_3 .
   b. démontrer qu'il existe une unique fonction polynôme $Q \in F_5$ telle que : pour tout $j \in \{1 ;2 ;3\}$ $Q(r_j) = f(r_j)$ et $Q'(r_j) = f'(r_j)$.
   c. démontrer que pour tout $x \in [-1 ; 1]$, $|f(x) - Q(x)| \leq \frac{M}{6!} x^2 (x^2 - 0{,}6)^2$ où $M = \sup |f^{(6)}(x)|$.
   d. en déduire que $\left| \int_{-1}^{1} f(x)dx - \frac{1}{9}\left(5 f(-\sqrt{0{,}6}) + 8f(0) + 5 f \sqrt{0{,}6} \right) \right| \leq \frac{M}{15750}$

5. Soit $g \in C^6([a ; b])$ et soit $h : t \to \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}$; démontrer que :
$$\left| \int_a^b g(x)dx - \frac{b-a}{18}\left(5\, g (h (-\sqrt{0{,}6})) + 8g(h (0)) + 5\, g (h (-\sqrt{0{,}6})) \right| \leq \frac{M(b-a)^7}{2016000}$$
$M = \sup |g^{(6)}(x)|$.