Séance du 20/12/06 avec M. Laffont

Partie A

E et F étant deux espaces normés , l'espace vectoriel $\mathcal{L}c$ (E ; F) des applications linéaires continues de E vers F est muni de la norme : $\|u\| = \sup \left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \; , \; x \neq 0 \right\} = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ (norme subordonnée aux normes de E et F).

1. Soit (u_n) une suite de $\mathcal{L}c$ (E ; F) ; démontrer que si (u_n) converge vers u alors, pour tout x de E, $(u_n(x))$ converge vers u (x).
2. E = IR[X] étant muni du produit scalaire pour lequel la base canonique est orthonormale, pour tout entier naturel n , soit $u_n : P \to (P / X^n)$;
   a. Déterminer $\|u_n\|$
   b. Soit $P \in$ IR[X] , étudier la convergence de $(u_n(P))$.
   c. (u_n) est-elle convergente ?

Partie B

Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormale $(e_1 ;\ldots ;e_p)$; l'espace vectoriel $\mathcal{L}$ (E) des endomorphismes de E est muni de la norme subordonnée: $\|u\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

1. Soit (u_n) une suite de $\mathcal{L}$ (E) ; on suppose que pour tout $i \in \{1 ;.. ;p\}$ $(u_n(e_i))$ converge, démontrer que (u_n) converge.

2. Soit u un endomorphisme orthogonal de E , $v = id_E - u$ et pour tout entier naturel n non nul, soit $p_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} u^j$.
   a. Démontrer que Ker v et Im v sont supplémentaires orthogonaux .
   b. Démontrer que (p_n) converge vers la projection orthogonale p sur Ker v .

Partie C

IR^n est muni du produit scalaire pour lequel la base canonique est orthonormale et $\mathcal{M}_n$(IR) de la norme : $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$. Une matrice A est dite s-positive lorsque pour tout x de IR^n, $(Ax / x) \geq 0$.

1. Démontrer que toute matrice A s'écrit de manière unique, somme d'une matrice symétrique A_s et d'une matrice antisymétrique A_a .
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur les valeurs propres de A_s, pour que A soit s-positive.

Dans toute la suite de l'exercice, A est une matrice s-positive.

3. Démontrer que pour tout $\lambda > 0$, $\lambda I + A$ est inversible. On notera $R_A(\lambda) = (\lambda I + A)^{-1}$
4. Démontrer que pour tout $\lambda > 0$, $\|R_A(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}$.
5. Démontrer que pour tout x de Im A, $\lambda R_A(\lambda) x \to 0$ lorsque $\lambda \to 0^+$.
6. Démontrer que Ker A et Im A sont supplémentaires.
7. pour tout entier naturel n non nul, soit $P_n = \frac{1}{n} R_A\left(\frac{1}{n}\right)$; démontrer que lorsque $n \to +\infty$, P_n tend vers le projecteur P sur Ker A , parallèlement à Im A.