Séance du 20/09/06 avec M. Laffont
Polynômes, racines, relations entre coefficients et racines.

Ex 1

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, déterminer la décomposition primaire dans **C**[X] du polynôme $P = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$. (**C** désignant l'ensemble des nombres complexes)
2. Démontrer que : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.
3. Justifier l'existence et déterminer $\int_0^{\pi} -\ln(\sin t)dt$

Ex 2

On note $x_1, \ldots\ldots, x_N$ les racines distinctes d'un polynôme $P \in$ **C**[X] et pour i allant de 1 à N, soit r_i l'ordre de multiplicité de la racine x_i ;

1. Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{P'}{P}$
2. Démontrer que toute racine de P' appartient à l'enveloppe convexe de $\{ x_1, \ldots\ldots, x_N \}$.
3. En déduire que si P est scindé dans IR alors P' est aussi scindé dans IR.
4. Retrouver ce dernier résultat en utilisant le théorème de Rolle.

Ex 3

A - Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ et $Q = P (X + d)$ où a, b, c, d sont des complexes ;

1. Démontrer qu'il existe deux complexes p et q tels que $Q = X^3 + pX + q$ si et seulement si $d = -\frac{a}{3}$
2. On appelle α, β et γ les racines de $Q = X^3 + pX + q$;
   a. Démontrer que : $Q'(\alpha)Q'(\beta)Q'(\gamma) = 4p^3+27q^2$
   b. En déduire que : Q admet une racine multiple $\Leftrightarrow$ $4p^3+27q^2 = 0$
   c. On suppose que p et q sont deux réels, démontrer que : α, β et γ sont réels $\Leftrightarrow$ $4p^3+27q^2 \le 0$

B - On appelle x_1, x_2 et x_3 les racines du polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ et soit $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

1. Démontrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in$ **C**² tel que : « $\alpha + \beta = x_1$; $\alpha j + \beta j^2 = x_2$; $\alpha j^2 + \beta j = x_3$ » si et seulement si $a = 0$.
2. Vérifier que: $\forall(\alpha ; \beta) \in$ **C**² $(X-(\alpha+\beta))(X-(\alpha j+\beta j^2))(X-(\alpha j^2+\beta j)) = X^3 - 3\alpha\beta X - (\alpha^3+\beta^3)$
3. Soit $(p ; q) \in$ **C**², démontrer qu'il existe α et β tels que : « $-3\alpha\beta = p$; $-(\alpha^3+\beta^3) = q$ » ; déterminer α et β lorsque p et q sont réels et que $4p^3+27q^2 \ge 0$.

C - application : déterminer les racines du polynôme $P = X^3 - 3X^2 + X - 1$.

Ex 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y = \frac{1}{x}$; soient P un point de $\mathcal{H}$, Q le symétrique de P par rapport à O et $\mathcal{C}$ le cercle de centre P et de rayon PQ ; le cercle coupe l'hyperbole en Q et trois autres points qu'on note A, B et C.

1. Démontrer que P est centre de gravité du triangle ABC.
2. En déduire que ABC est équilatéral.