Séance du 17 / 09 / 08 avec M. Laffont

Soit $(A,+,\times)$ un anneau commutatif (unitaire) intègre ; on note A^* l'ensemble des éléments inversibles ou unités de A et pour tout $a \in A$, on note (a) l'idéal engendré par a .

Rappels. Soit a un élément de A, non nul et non inversible ; on dit que :

- a est irréductible lorsque : $\forall (b,c) \in A^2, \ (a = bc \Rightarrow b \in A^* \text{ ou } c \in A^*)$
- a est premier lorsque : $\forall (b,c) \in A^2, \ (a / bc \Rightarrow a/b \text{ ou } a/c)$
- deux éléments a et b sont associés s'il existe une unité u telle que $a = bu$.

I) Eléments premiers, éléments irréductibles.

1) Démontrer que tout élément premier est irréductible .
2) Dans cette question $A = \mathbf{Z}[i\sqrt{5}] = \{ z \in \mathbf{C}, \exists (a,b) \in \mathbf{Z}^2, z = a + bi\sqrt{5} \}$
   a. Vérifier que A est un sous-anneau du corps **C** des nombres complexes.
   b. Déterminer les unités de A.
   c. Démontrer que 2 est irréductible dans A .
   d. Démontrer que 2 n'est pas premier dans A .

II) Anneau principal

Dans cette partie l'anneau $(A,+,\times)$ est supposé principal.

1) Soit $(a)+(b) = \{x \in \mathbf{A}, \exists (u,v) \in \mathbf{A}^2, x = au + bv\}$ l'idéal engendré par a et b ;
   a. on suppose que $(a)+(b) = (d)$, démontrer que d divise a et b et que tout élément qui divise a et b , divise d *(d est un pgcd de a et b).*
   b. On suppose que a est irréductible et que a ne divise pas b, démontrer qu'il existe $(u,v) \in A^2$ tel que $au + bv = 1$; en déduire que a est premier.
   c. Montrer que $\mathbf{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est pas un anneau principal.
2) Démontrer que toute suite d'idéaux, croissante au sens de l'inclusion, est stationnaire.
3) Soit a un élément de A , non nul et non inversible, démontrer qu'il existe des éléments irréductibles $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tels que $a = p_1 p_2 \ldots p_n$.
4) Démontrer qu'à l'ordre près et aux unités près, cette décomposition est unique. *(A est factoriel)*

III) L'anneau Z [i]

Dans cette troisième partie $A = \mathbf{Z}[i] = \{ z \in \mathbf{C}, \exists (a,b) \in \mathbf{Z}^2, z = a + bi \}$ et on note N l'application définie sur A par $N(z) = |z|^2$.

1. Déterminer les éléments inversibles de A.
2. Démontrer que pour tout $z \in \mathbf{C}$, il existe $q \in A$ tel que $|z - q| < 1$.
3. Démontrer que A est un anneau euclidien.
4. Démontrer que tout anneau euclidien est un anneau principal.
5. Soit $z = a + ib$ un élément non nul de A.
   a. Montrer que si N(z) est un nombre premier de **Z** alors z est irréductible dans A
   b. Montrer que si $ab \neq 0$ et que z est irréductible alors N(z) est un nombre premier dans **Z**
   c. Montrer que les irréductibles de A sont :
      - les éléments z de A tels que N(z) est un nombre premier de **Z**
      - les nombres premiers de **Z** qui ne peuvent pas s'écrire comme la somme de deux carrés et leurs associés.

IV) L'anneau A[X]

$(A,+,\times)$ est un anneau commutatif (unitaire) intègre qui n'est pas un corps et A[X] est l'anneau des polynômes de A; soit a un élément de A non nul et non inversible et soit I l'idéal engendré par a et X .

1. On suppose que $I = (P)$.
   a. Démontrer que $\deg(P) = 0$
   b. Démontrer que P est inversible dans A ; aboutir à une contradiction.
2. Conclure.