Le 16/11/05 avec M. Laffont.

M. Mazoyer ne pouvant assurer la séance du 16 / 11 / 05, nous avons permuté nos interventions des 16 / 11 et 30 / 11 .

objectif : *étudier la convergence simple de la série de Fourier d'une fonction périodique, continue par morceaux et monotone sur un intervalle.*

Exercice 1 : *une formule de la moyenne*

f et g sont deux fonctions continues de [a ;b] vers IR et G est la primitive de g qui s'annule en a. On suppose f décroissante positive et on note [m ; M] le segment G ([a ;b]) . Pour tout n ∈ IN*, on considère la subdivision régulière ($x_0, \ldots, x_n$) de [a ;b]

1. Démontrer que pour tout $k \in \{0;1....n-1\}$, il existe $c_k \in [x_k;x_{k+1}]$ tel que $G(x_{k+1}) - G(x_k) = \frac{b-a}{n} g(c_k)$
2. Démontrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\big(G(x_{k+1}) - G(x_k)\big)\right)_n$ converge vers $\int_a^b f(t)g(t)dt$.
3. a) Démontrer que : $m f(a) \le \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\big(G(x_{k+1}) - G(x_k)\big) \le M f(a)$.

   b) En déduire qu'il existe c ∈ [a ; b] tel que : $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\int_a^c g(t)dt$
4. Etudier les cas où f est croissante négative , croissante positive, décroissante négative .
   (on pourra appliquer 3b. à des fonctions associées à f)

Exercice 2 : *lemme de Lebesgue.*

Soit f une fonction appartenant à C^1([a ; b], IR) et pour tout n∈ IN soit $I_n = \int_a^b f(t)\sin((n+1/2)t)dt$;

1. Démontrer en utilisant une intégration par parties, que la suite $(I_n)_n$ converge vers 0.
2. Démontrer le même résultat lorsque :
   a) f est continue sur [a ; b] ; *(on pourra utiliser le théorème de Weierstrass) .*
   b) f est continue par morceaux sur [a ; b].

Exercice 3 : *séries de Fourier*

Partie A : *étude d'une primitive du noyau de Dirichlet.*

Pour tout n appartenant à IN*, soit D_n , la fonction définie par $D_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kt$ et soit F_n la primitive de D_n , qui s'annule en 0 .

1. Démontrer que pour tout $t \neq 2k\pi$, $D_n(t) = \dfrac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}$
2. Etudier les variations de F_n sur $[0 ; \pi]$.
3. a) Soit k un entier tel que $\left[\dfrac{2k\pi}{n+1/2} ; \dfrac{(2k+2)\pi}{n+1/2}\right] \subset [0 ; \pi]$; démontrer que :

   $$\int_{\frac{2k\pi}{n+1/2}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n+1/2}} D_n(t)dt = \int_{\frac{2k\pi}{n+1/2}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n+1/2}} \sin((n+1/2)t)\left(\frac{1}{\sin(t/2)} - \frac{1}{\sin(t/2+\pi/2n+1)}\right)dt .$$

   En déduire que : $\displaystyle\int_{\frac{2k\pi}{n+1/2}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n+1/2}} D_n(t)dt > 0$

   b) Démontrer que pour tout entier k tel que $\left[\dfrac{(2k-1)\pi}{n+1/2} ; \dfrac{(2k+1)\pi}{n+1/2}\right] \subset [0 ; \pi]$, $\displaystyle\int_{\frac{(2k-1)\pi}{n+1/2}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n+1/2}} D_n(t)dt < 0$.

   c) Démontrer que la suite $\left(F_n\left(\dfrac{\pi}{n+1/2}\right)\right)_n$ converge . *(somme de Riemann)*

   d) En déduire qu'il existe un réel A tel que : $\forall\, n \in IN^*, \forall\, t \in [0 ; \pi]$, $0 \leq F_n(t) \leq A$

Partie B : *convergence de $(S_n(f))_n$.*

f étant une fonction de IR vers IR , 2π - périodique et continue par morceaux , pour tout $n \in$ IN on note $S_n(f)$ la $n^{\text{ème}}$ somme partielle de sa série de Fourier .

1. Démontrer que : $\forall\, n \in IN^*, \forall\, x \in IR$, $S_n(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\left(\displaystyle\int_0^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt + \int_0^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt\right)$
2. Soit x un réel ; on suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que f soit continue sur$]x-\alpha ; x+\alpha[$, monotone sur $]x-\alpha ; x]$ et $[x ; x+\alpha[$;
   a) Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi}\big(f(x+t)-f(x)\big)D_n(t)dt = 0.$

   (On pourra utiliser 4. de l'ex 1, 2. de l'ex 2 ainsi que A3d) de l'ex 3)

   b) Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi}\big(f(x-t)-f(x)\big)D_n(t)dt = 0.$

   c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x) = f(x)$
3. Soit x un réel ; on suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que f soit continue et monotone sur $]x-\alpha ; x[$ et $]x ; x+\alpha[$, étudier la convergence de la suite $(S_n(f)(x))_n$.

Partie C :

On considère la fonction φ de IR vers IR , 2π - périodique , définie par :

$$\forall\, x \in [0 ; 2\pi[\quad \varphi(x) = \pi - x$$

1. a) Déterminer le développement en série de Fourier de φ .

   b) Justifier la convergence et déterminer la somme de la série de Fourier de φ .
2. En déduire la limite de la suite de fonctions $(F_n)_n$.