Séance du 16/09/09 avec M. Laffont

Exercice 1 : *(formule du crible)*

Soit E un ensemble fini ; pour toute partie A de E, on note $|A|$ le cardinal de A et χ_A la fonction caractéristique de A. Soient $A_1, A_2, \dots A_n$ des parties de E et soit B le complémentaire de $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ dans E ;

1. Exprimer la fonction caractéristique de B à l'aide des fonctions caractéristiques des A_i .
2. En dédire que $\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |A_k| - \sum_{1\le j<k\le n} |A_j \cap A_k| + \sum_{1\le j<k<l\le n} |A_j \cap A_k \cap A_l| \dots\dots\dots + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right|$

Exercice 2 :

Soit n un entier naturel non nul et q un nombre premier inférieur ou égal à n ;

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer le nombre de multiples non nuls de q^k, inférieurs ou égaux à n .
2. En déduire que l'exposant de q dans la décomposition en facteurs premiers de n! , est égal à $\sum_{k\in N^*} E(n/q^k)$ où E désigne la fonction partie entière.
3. En utilisant la question précédente, démontrer que pour tout entier naturel p inférieur ou égal à n , $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ est un entier .

Exercice 3 :

Soient n et p deux entiers naturels non nuls ;

1. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes, de $[\![1 ; p]\!]$ dans $[\![1 ; n]\!]$.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications croissantes de $[\![1 ; p]\!]$ dans $[\![1 ; n]\!]$ et $\mathcal{G}$ l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1 ; p]\!]$ dans $[\![1 ; n+p-1]\!]$.

2.a. Démontrer que l'application φ, qui à toute application f de $\mathcal{F}$, associe l'application g définie par g (x) = f(x) + x – 1 , est une bijection de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$.

2.b. En déduire le nombre d'applications croissantes, de $[\![1 ; p]\!]$ dans $[\![1 ; n]\!]$.

3. Application : déterminer le nombre de façons de placer p objets indiscernables dans n rangements .

Exercice 4 :

$d_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, d_n est le nombre de dérangements (permutations sans point fixe) de n éléments .

1. Justifier les égalités : $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.
2. Soit $p_n = \dfrac{d_n}{n!}$
   a. Démontrer que la série entière $\sum p_n x^n$ a un rayon de convergence R strictement positif .
   b. Déterminer la fonction f, définie sur]-R ; R[par $f(x) = e^x \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$.
   c. En déduire que : $p_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$; déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$. *(Application : théorème des chapeaux)*
3. Retrouver l'égalité précédente de deux autres manières
   a. En inversant une matrice carrée d'ordre n+1 .
   b. En utilisant la formule du crible .

Exercice 5 :

Soient n et p deux entiers naturels non nuls ; Comme à la question 3 de l'exercice 4, démontrer de deux manières différentes que le nombre de surjections d'un ensemble de n éléments sur un ensemble de p éléments est : $S(n ; p) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$