Lycée La Martinière Monplaisir

Jean-Marie Monier

Agrégation interne de Mathématiques 2005-2006

Épreuve du samedi 26 novembre 2005

Si un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) la signale sur sa copie et devra poursuivre sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il (elle) est amené(e) à prendre.

PARTIE I

On considère la série entière $\sum_{n \geq 1} n^{-s} z^n$ de la variable complexe z, où s est un réel fixé.

1. Déterminer, pour $s \in \mathbb{R}$ fixé, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} n^{-s} z^n$.

2. Dans cette question 2., on suppose $|z| = 1$ et on note $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

2.a. Étudier la convergence de la série numérique $\sum_{n \geq 1} n^{-s} z^n$, dans le cas $s > 1$, et dans le cas $s \leq 0$.

2.b. Étudier la convergence de la série numérique $\sum_{n \geq 1} n^{-s} z^n$ pour $z = 1$, dans le cas où $0 < s \leq 1$.

2.c. Dans cette question 2.c., on suppose $0 < s \leq 1$ et $z \neq 1$. On note $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} z^k$.

Montrer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad |S_n| \leq \frac{1}{\left|\sin \dfrac{\theta}{2}\right|}.$$

En remarquant que $z^k = S_k - S_{k-1}$, montrer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^{-s} z^k = \sum_{k=1}^{n-1} \left(k^{-s} - (k+1)^{-s}\right) S_k + n^{-s} S_n.$$

En déduire que la série numérique $\sum_{n \geq 1} n^{-s} z^n$ est convergente.

On note dorénavant $\varphi(z,s)=\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}z^n$ pour tout couple $(z,s)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ pour lequel cette série numérique converge.

3.a. Montrer : $$\forall\,(x,s)\in\,]-1\,;1[\times\mathbb{R},\quad \varphi(x,s+1)=\int_0^x \frac{\varphi(t,s)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

3.b. Calculer $\varphi(x,0)$ et $\varphi(x,1)$ pour tout $x\in\,]-1\,;1[$.

4. Dans cette question 4., on suppose $s>1$.

4.a. On note, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$f_n:[0\,;+\infty[\;\longrightarrow\mathbb{R},\quad t\longmapsto f_n(t)=t^{s-1}\mathrm{e}^{-nt}.$$

Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et exprimer $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide de n,s et de $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

4.b. Démontrer, pour tout $s>1$ et tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|\leq 1$:

$$\varphi(z,s)=\frac{z}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^t-z}\,\mathrm{d}t.$$

PARTIE II

On note, pour tout $s\in\,]1\,;+\infty[$: $\quad \zeta(s)=\varphi(1,s)=\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}.$

1. Montrer que ζ est de classe C^∞ sur $]1\,;+\infty[$ et exprimer, pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $s\in\,]1\,;+\infty[$, $\zeta^{(k)}(s)$ sous forme d'une somme de série.

2. Montrer que ζ est strictement décroissante et est convexe sur $]1\,;+\infty[$.

3. Montrer : $$\forall\, s\in\,]1\,;+\infty[,\quad 0\leq\zeta(s)-1\leq\int_1^{+\infty} t^{-s}\,\mathrm{d}t\leq\zeta(s).$$

4. En déduire : $\zeta(s)\underset{s\,\longrightarrow\,1}{\longrightarrow}+\infty$ et $\zeta(s)\underset{s\,\longrightarrow\,1}{\sim}\frac{1}{s-1}$.

5. Établir : $\zeta(s)\underset{s\,\longrightarrow\,+\infty}{\longrightarrow}1$ et $\zeta(s)-1\underset{s\,\longrightarrow\,+\infty}{\sim}2^{-s}$.

6. Former le tableau de variations de ζ (avec limites) et tracer l'allure de la courbe représentative de ζ.

7. Démontrer : $$\forall\,(s,t)\in\,]1\,;+\infty[^2,\quad \zeta\Big(\frac{s+t}{2}\Big)\leq\sqrt{\zeta(s)\zeta(t)}.$$

8. Étudier, pour $a\in\mathbb{R}$ fixé, l'existence de l'intégrale $\int_1^{+\infty}(\zeta(s)-1)^a\,\mathrm{d}s$.

PARTIE III

1. On note $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application 2π-périodique telle que :

$$\forall\, x \in [0\,;2\pi[, \quad g(x) = \Big(\frac{\pi - x}{2}\Big)^2.$$

1.a. Démontrer :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

1.b. En déduire les valeur de $\zeta(2)$ et de $\zeta(4)$.

2.a. Exprimer, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la partie réelle de $\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 2)$.

2.b. Montrer :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t(\mathrm{e}^t \cos\theta - 1)}{\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^t \cos\theta + 1}\,\mathrm{d}t = g(\theta) - \frac{\pi^2}{12}.$$

2.c. En déduire les valeurs des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t + 1}\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^2 \operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh}(\lambda t)}\,\mathrm{d}t,\ \ \lambda \in \mathbb{R}^*, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t.$$

3.a. Montrer, pour tout $(s, \theta) \in\,]0\,;+\infty[\times \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^s(\mathrm{e}^t \cos\theta - 1)}{\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^t \cos\theta + 1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)} \cos n\theta$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^s \mathrm{e}^t \sin\theta}{\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^t \cos\theta + 1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)} \sin n\theta,$$

3.b. En déduire, pour tout $s \in\,]0\,;+\infty[$, la valeur des intégrales

$$I(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t$$

en fonction de $\Gamma(s+1)$ et des sommes

$$S_1(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)^{-(s+1)} \qquad \text{et} \qquad S_2(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (2k+1)^{-(s+1)}$$

∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗