Lycée La Martinière Monplaisir

Jean-Marie Monier

Agrégation interne de Mathématiques 2005-2006

Épreuve du samedi 14 janvier 2006

Si un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale sur sa copie et devra poursuivre sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il (elle) est amené(e) à prendre.

Notations

- n, p, q sont des entiers naturels non nuls
- $\mathfrak{S}_n$ est le groupe symétrique, groupe des permutations de $\{1, ..., n\}$
- un élément σ de $\mathfrak{S}_n$ est appelé involution si et seulement si σ^2 est l'identité de $\{1, ..., n\}$
- $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker, $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$
- $(\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_n)$ est la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
- I_n est la matrice identité, $\mathrm{I}_n = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$
- U est la matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les termes sont égaux à 1
- pour $(d_1, ..., d_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\operatorname{diag}(d_1, ..., d_n)$ la matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, diagonale et dont les termes diagonaux sont, dans l'ordre, $d_1, ..., d_n$
- $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$
- pour $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ désigne le spectre réel de M, ensemble des valeurs propres réelles de M
- $\mathbf{S}_n^+$ est l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^{\mathrm{t}}XSX \geqslant 0$
- $\mathbf{S}_n^{++}$ est l'ensemble des matrices symétriques définies-positives de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}, \quad {}^{\mathrm{t}}XSX > 0$
- D_n^{++} est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ à termes diagonaux tous > 0.

QUESTION PRÉLIMINAIRE : Caractérisation des matrices symétriques positives

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer :

$$\begin{cases} S \in \mathbf{S}_n^+ \iff \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+ \\ S \in \mathbf{S}_n^{++} \iff \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

PARTIE I : Le groupe $\mathbf{P}_n$

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $M_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, appelée matrice de permutation associée à σ, et on note f_σ l'endomorphisme de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice M_σ relativement à la base canonique.

On note $\mathbf{P}_n = \{M_\sigma \,;\, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ l'ensemble des matrices de permutation de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

1.a. Montrer : $$\forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \forall\, j \in \{1, ..., n\},\quad f_\sigma(\mathrm{E}_j) = \mathrm{E}_{\sigma(j)}.$$

1.b. Établir : $$\forall\, \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n,\quad M_\sigma M_\tau = M_{\sigma \circ \tau}.$$

2. Démontrer que $\mathbf{P}_n$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et que l'application $\sigma \longmapsto M_\sigma$ est un isomorphisme du groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ sur le groupe $(\mathbf{P}_n, \cdot)$.

3.a. Vérifier : $$\forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n,\quad {}^{\mathrm{t}}(M_\sigma) = M_{\sigma^{-1}}.$$

3.b. En déduire que, pour toute $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, la matrice M_σ est symétrique si et seulement si σ est une involution.

4. Rappeler la définition d'un cycle c de $\mathfrak{S}_n$, la définition du support d'un cycle c de $\mathfrak{S}_n$, et énoncer le théorème de décomposition en cycles.

On appelle longueur d'un cycle c le cardinal du support de c.

5.a. Déterminer le polynôme minimal (resp. le polynôme caractéristique) d'une matrice carrée diagonale par blocs, en fonction des polynômes minimaux (resp. caractéristiques) des blocs diagonaux.

5.b. En déduire, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, le polynôme minimal de M_σ et le polynôme caractéristique de M_σ, en faisant intervenir la décomposition évoquée en 4.

6.a. Démontrer que, pour toute $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, la matrice M_σ est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

6.b. Démontrer que, pour toute $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, la matrice M_σ est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si σ est une involution.

7.a. On suppose ici $n \geqslant 2$. Soit $k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Montrer que, si $k \leqslant n$, alors l'équation $M^k = \mathrm{I}_n$, d'inconnue $M \in \mathbf{P}_n$, admet au moins une solution autre que I_n.

7.b. Est-ce que, pour tout $k > n$, l'équation $M^k = \mathrm{I}_n$, d'inconnue $M \in \mathbf{P}_n$, admet au moins une solution autre que I_n ?

7.c. Pour chacune des équations suivantes, d'inconnue M, matrice de permutation, déterminer le nombre de solutions autres que la matrice identité :

(i) $M^4 = \mathrm{I}_4$ (ii) $M^5 = \mathrm{I}_7$ (iii) $M^7 = \mathrm{I}_6$.

8. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Montrer que la suite $\left((M_\sigma)^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si σ est l'identité.

PARTIE II : Le groupe $\mathbf{G}_n$

1. Vérifier que $\mathbf{D}_n^{++}$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

On note $\mathbf{G}_n$ l'ensemble des produits $M_\sigma D$ lorsque σ décrit $\mathfrak{S}_n$ et D décrit $\mathbf{D}_n^{++}$:

$$\mathbf{G}_n = \{M_\sigma D\,;\, \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ D \in \mathbf{D}_n^{++}\}.$$

2. Montrer que l'application $(\sigma, D) \longmapsto M_\sigma D$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n \times \mathbf{D}_n^{++}$ sur $\mathbf{G}_n$.

3. Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $D = \mathrm{diag}\,(d_1, ..., d_n) \in \mathbf{D}_n^{++}$.
Montrer : $M_\sigma D = D^{(\sigma)} M_\sigma$, où on a noté $D^{(\sigma)} = \mathrm{diag}\,(d_{\sigma^{-1}(1)}, ..., d_{\sigma^{-1}(n)})$.

4. Démontrer que $\mathbf{G}_n$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

5. Est-ce que, pour $n \geqslant 2$, l'application $(\sigma, D) \longmapsto M_\sigma D$ est un isomorphisme du groupe-produit $\mathfrak{S}_n \times \mathbf{D}_n^{++}$ sur le groupe $\mathbf{G}_n$?

6.a. Est- ce que $\mathbf{G}_n$ est fini ?

6.b. Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $D = \mathrm{diag}\,(d_1, ..., d_n) \in \mathbf{D}_n^{++}$. On note $\sigma = c_1 \circ \cdots \circ c_N$ la décomposition de σ en produit de cycles deux à deux disjoints.
Montrer que le sous-groupe de $\mathbf{G}_n$ engendré par $M_\sigma D$ est fini si et seulement si :

$$\forall\, k \in \{1, ..., N\}, \quad \prod_{r \in \mathrm{Supp}\,(c_k)} d_r = 1,$$

où $\mathrm{Supp}\,(c_k)$ désigne le support du cycle c_k.

6.c. Un exemple : On note, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$: $A(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R})$.

Vérifier que $A(a) \in \mathbf{G}_4$, et décomposer $A(a)$ sous la forme $A(a) = M_\sigma D$, où $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ et $D \in \mathbf{D}_4^{++}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que le sous-groupe de $\mathbf{G}_4$ engendré par $A(a)$ soit fini.

7. Est-ce que, pour tout sous-groupe H de $\mathfrak{S}_n$ et tout sous-groupe L de $\mathbf{D}_n^{++}$, l'ensemble $\{M_\sigma D\,;\sigma \in H,\, D \in L\}$ est un sous-groupe de $\mathbf{G}_n$? À cet effet, on poura examiner l'exemple suivant : $n = 2$, $H = \mathfrak{S}_2$, $L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

8. Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $D = \mathrm{diag}\,(d_1, ..., d_n) \in \mathbf{D}_n^{++}$ telle que : $\forall\, i \in \{1, ..., n\}$, $d_i < 1$.
Montrer : $(M_\sigma D)^k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0$.

PARTIE III : Matrices positives

On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est positive (resp. strictement positive) si et seulement si :

$$\forall\,(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,p\}, \quad a_{ij} \geqslant 0 \quad \text{(resp. } > 0\text{)}.$$

On note $\mathbf{M}^{+}_{n,p}$ (resp. $\mathbf{M}^{++}_{n,p}$) l'ensemble des matrices positives (resp. strictement positives) de $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et on note $\mathbf{M}^{+}_{n}$ (resp. $\mathbf{M}^{++}_{n}$) à la place de $\mathbf{M}^{+}_{n,n}$ (resp. $\mathbf{M}^{++}_{n,n}$).

1. Deux exemples :

a) On note ici $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$. Est-ce que A est positive ? Est-ce que A est symétrique positive ?

b) On note ici $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$. Est-ce que A est positive ? Est-ce que A est symétrique positive ?

2. Montrer :

a) $\forall\, A, B \in \mathbf{M}^{+}_{n,p}, \quad A + B \in \mathbf{M}^{+}_{n,p}$

b) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+, \ \forall\, A \in \mathbf{M}^{+}_{n,p}, \quad \alpha A \in \mathbf{M}^{+}_{n,p}$

c) $\forall\, A \in \mathbf{M}^{+}_{n,p}, \ \forall\, B \in \mathbf{M}^{+}_{p,q}, \quad AB \in \mathbf{M}^{+}_{n,q}$

d) $\forall\, A \in \mathbf{M}^{+}_{n,p}, \quad {}^{\mathrm{t}}A \in \mathbf{M}^{+}_{p,n}$

et les propriétés analogues pour des matrices strictement positives.

3. Soit $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer :

$$A \in \mathbf{M}^{+}_{n,p} \iff (\ \forall\, X \in \mathbf{M}^{+}_{p,1}, \quad AX \in \mathbf{M}^{+}_{n,1}).$$

4. A-t-on, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\forall\, A \in \mathbf{M}^{+}_{n} \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), \quad A^{-1} \in \mathbf{M}^{+}_{n} \ ?$$

5.a. Soit $A \in \mathbf{M}^{+}_{n} \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^{-1} \in \mathbf{M}^{+}_{n}$. Démontrer que chaque ligne et chaque colonne de A contient un terme strictement positif et un seul et que les autres termes sont nuls.

5.b. Établir :

$$\left\{A \in \mathbf{M}^{+}_{n} \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})\,;\ A^{-1} \in \mathbf{M}^{+}_{n}\right\} = \mathbf{G}_n.$$

PARTIE IV : Commutant $\mathbf{C}_n$ de $\mathbf{P}_n$ dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$

On note, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$: $A(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & \ddots & (b) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (b) & \ddots & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Les termes diagonaux de $A(a,b)$ sont tous égaux à a et les autres termes sont tous égaux à b.

On note $\mathbf{C}_n$ l'ensemble des matrices $A(a,b)$ lorsque (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$.

1. Démontrer que $\mathbf{C}_n$ est le commutant de $\mathbf{P}_n$ dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $\mathbf{C}_n$ est l'ensemble $\{X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})\,;\, \forall\, A \in \mathbf{P}_n,\quad AX = XA\}$.

2. Établir que $\mathbf{C}_n$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par I_n et U.

3. Vérifier que $\mathbf{C}_n$ est une sous-algèbre commutative et unitaire de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

4.a. Montrer que U est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de U.

4.b. En déduire, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, le spectre de $A(a,b)$.

5.a. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que $A(a,b) \in \mathbf{S}_n^{++}$.

5.b. Représenter graphiquement, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, l'ensemble des couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $A(a,b) \in \mathbf{S}_n^{++}$.

6. En notant c la permutation circulaire $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$, reconnaître $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} M_{c^k}$.

PARTIE V : Étude d'une matrice tridiagonale

On note, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$: $S(a,b)=\begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0\\ b & a & \ddots & (0) & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & (0) & \ddots & a & b\\ 0 & \dots & 0 & b & a\end{pmatrix}\in\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Les termes diagonaux de $S(a,b)$ sont tous égaux à a, les termes situés sur les deux petites diagonales sont tous égaux à b, et les autres termes sont tous nuls.

1. Est-ce que $S(a,b)$ est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$?

2.a. Soient $\lambda\in\mathbb{R}$, $X=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})-\{0\}$. On note de plus $x_0=0$ et $x_{n+1}=0$. Montrer :

$$S(a,b)X=\lambda X \iff \Big(\forall k\in\{1,...,n\},\quad bx_{k+1}+(a-\lambda)x_k+bx_{k-1}=0\Big).$$

2.b. En déduire, pour $b\neq 0$, les valeurs propres de $S(a,b)$, et, pour chaque valeur propre, une base du sous-espace propre associé.

3.a. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un polynôme unique $U_n\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que :

$$\forall t\in\,]-1\,;1[,\quad U_n(t)=\frac{\sin\left((n+1)\operatorname{Arccos} t\right)}{\sin(\operatorname{Arccos} t)}.$$

3.b. Exprimer, pour $b\neq 0$, le polynôme caractéristique de $S(a,b)$ à l'aide de U_n.

4.a. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ pour que $S(a,b)\in\mathbf{S}_n^{++}$.

4.b. Représenter graphiquement, pour $n\in\mathbb{N}^*$ fixé, l'ensemble des couples $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $S(a,b)\in\mathbf{S}_n^{++}$.

$* - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - *$