Préparation à l'agrégation interne de Mathématiques 2006-2007

Jean-Marie Monier

Corrigé de l'épreuve d'entraînement du 25 novembre 2006

PARTIE I

I.1.a. Soit $y : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une application développable en série entière en 0, de rayon $R > 0$.

D'après le Cours, on peut dériver terme à terme à l'intérieur de l'intervalle de convergence, d'où, pour tout $x \in]-R\,;R[$:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

On obtient, pour tout $x \in]-R\,;R[$:

$$\begin{aligned}
& xy''(x) + y'(x) + xy(x) \\
= \ & \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\
= \ & \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \\
= \ & a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big((n+1)n a_{n+1} + (n+1) a_{n+1} + a_{n-1}\big) x^n \\
= \ & a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big((n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1}\big) x^n.
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, on déduit :

$$\begin{aligned}
& y \text{ est solution de (E) sur }]-R\,;R[\\
\iff \ & \Big(a_1 = 0 \ \text{ et } \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \ \ (n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1} = 0\Big) \\
\iff \ & \Big(a_1 = 0 \ \text{ et } \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \ \ a_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)^2} a_{n-1}\Big) \\
\iff \ & \begin{cases} \forall\, p \in \mathbb{N}, \ \ a_{2p+1} = 0 \\ \forall\, p \in \mathbb{N}, \ \ a_{2p} = \dfrac{-1}{(2p)^2} \dfrac{-1}{(2p-2)^2} \cdots \dfrac{-1}{2^2} a_0 = \dfrac{(-1)^p}{2^{2p}(p!)^2} a_0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, si y est développable en série entière en 0, de rayon $R > 0$, y est solution de (E) sur $]-R\,;R[$ si et seulement si :

$$\forall\, x \in]-R\,;R[,\quad y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}.$$

Réciproquement, considérons la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$.

Notons, pour $x \in \mathbb{R}^*$ fixé et $n \in \mathbb{N}$: $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n(x)| > 0$ et : $\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \dfrac{x^{2(n+1)}}{4^{n+1}\big((n+1)!\big)^2} \cdot \dfrac{4^n (n!)^2}{x^{2n}} = \dfrac{x^2}{4(n+1)^2} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$

D'après le théorème de d'Alembert pour les séries numériques, il en résulte que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n(x)$ converge, et donc la série entière envisagée est de rayon infini.

On conclut :

Les solutions de (E) développables en série entière en 0 sont les applications $x \longmapsto a_0 \displaystyle\sum_{n=0]}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2}$

$a_0 \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de ces séries entières est infini, et ces fonctions sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

On note : $$J : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}.$$

Il est clair que $J \neq 0$, puisque, par exemple, $J(0) = 1 \neq 0$.

On conclut :

L'ensemble des solutions de (E) développables en série entière en 0 est la droite vectorielle engendrée par

I.1.b. • On a : $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad J(-x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} (-x)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n} = J(x),$

donc : $\boxed{J \text{ est paire}}$

• Puisque J est développable en série entière en 0 de rayon infini, d'après le Cours :

$$\boxed{J \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$$

• On a, d'après le DSE(0) de J : $J(0) = 1$, $J'(0) = 0$, $\dfrac{J''(0)}{2!} = \dfrac{(-1)^1}{4^1 (1!)^2} = -\dfrac{1}{4}$, donc $J''(0) = -\dfrac{1}{2}$.

• Puisque $J(0) = 1$, la courbe représentative C de J passe par le point $(0,1)$.

Puisque $J'(0) = 0$, la tangente en $(0,1)$ à C est parallèle à $x'x$.

Puisque $J''(0) = -\dfrac{1}{2} < 0$, la courbe C tourne sa concavité vers les y négatifs.

I.1.c. • Soit $x \in [0\,;2]$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$.

La série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n(x)$ est alternée, la suite $(|u_n(x)|)_{n \geqslant 0}$ converge vers 0 car la série en question est convergente, et la suite $(|u_n(x)|)_{n \geqslant 0}$ est décroissante car, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{x^{2(n+1)}}{4^{n+1}((n+1)!)^2} \cdot \frac{4^n (n!)^2}{x^{2n}} = \frac{x^2}{4(n+1)^2} \leqslant 1,$$

puisque $0 \leqslant x \leqslant 2$ et $n \geqslant 0$.

La série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n(x)$ relève donc du **TSCSA**, et il en résulte que sa somme $J(x)$ est comprise entre deux sommes partielles d'indices successifs. En particulier : $u_0(x) + u_1(x) \leqslant J(x) \leqslant u_0(x)$.

Comme $u_0(x) = 1$ et $u_1(x) = -\dfrac{x^2}{4}$, on déduit : $1 - \dfrac{x^2}{4} \leqslant J(x) \leqslant 1$.

Puisque $x \in [0\,;2]$, on a $1 - \dfrac{x^2}{4} \geqslant 0$, et on conclut :

$$\boxed{\forall x \in [0\,;2], \quad 0 \leqslant J(x) \leqslant 1}$$

• Comme on vient de le voir, en particulier pour $x = 1$ et pour $x = 2$, la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n(x)$ relève du TSCSA, donc, en notant $R_n(x)$ le reste d'ordre n de cette série numérique, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \frac{x^{2(n+1)}}{4^{n+1}((n+1)!)^2}.$$

$*$ Pour $x = 1$, on a $|R_n(1)| \leqslant \dfrac{1}{4^{n+1}((n+1)!)^2}$ et $\dfrac{1}{4^2(2!)^2} = \dfrac{1}{64} < \dfrac{1}{2}10^{-1}$,

donc $|R_n(1)| < 0,5 \cdot 10^{-1}$ dès que $n \geqslant 1$.

Il en résulte que $u_0(1) + u_1(1)$ est une valeur approchée de $J(1)$ à $0,5 \cdot 10^{-1}$ près.

Et : $u_0(1) + u_1(1) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} = 0,75$.

On conclut :

$$\boxed{J(1) \simeq 0,8 \text{ à } 10^{-1} \text{ près}}$$

$*$ Pour $x = 2$, on a : $|R_n(2)| \leqslant \dfrac{2^{2(n+1)}}{4^{n+1}((n+1)!)^2} = \dfrac{1}{((n+1)!)^2}$ et $\dfrac{1}{(3!)^2} = \dfrac{1}{36} < \dfrac{1}{2}10^{-1}$,

donc $|R_n(2)| < 0,5 \cdot 10^{-1}$ dès que $n \geqslant 2$.

Il en résulte que $u_0(2) + u_1(2) + u_2(2)$ est une valeur approchée de $J(2)$ à 10^{-1} près.

Et : $u_0(2) + u_1(2) + u_2(2) = 1 - \dfrac{2^2}{4^1(1!)^2} + \dfrac{2^4}{4^2(2!)^2} = 1 - 1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} = 0,25$.

On conclut :

$$\boxed{J(2) \simeq 0,2 \text{ à } 10^{-1} \text{ près}}$$

$*$ Pour $x = 3$, la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n(3)$ ne relève pas du TSCSA, car $|u_0(3)| < |u_1(3)|$ puisque $u_0(3) = 1,\ u_1(3) = \dfrac{-1}{4(1!)^2} 3^2 = -\dfrac{9}{4}$.

Montrons que cette série relève du TSCSA à partir d'un certain indice.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{|u_{n+1}(3)|}{|u_n(3)|} = \dfrac{3^2}{4(n+1)^2} = \dfrac{9}{4(n+1)^2} \leqslant 1$, et $\dfrac{9}{4(n+1)^2} \leqslant 1$ dès que $n \geqslant 1$. Donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n(3)$ relève du TSCSA.

On a alors, pour tout $n \geqslant 1$: $|R_n(3)| \leqslant |u_{n+1}(3)| = \dfrac{9^{n+1}}{4^{n+1}\big((n+1)!\big)^2}$

et $\dfrac{9^4}{4^4(4!)^2} = \dfrac{6561}{147456} \simeq 0,044... < 0,5 \cdot 10^{-1}$.

Il en résulte que $u_0(3) + u_1(3) + u_2(3) + u_3(3)$ est une valeur approchée de $J(3)$ à $0,5 \cdot 10^{-1}$ près.

Et :

$$u_0(3) + \cdots + u_3(3) = 1 - \frac{3^2}{4 \cdot (1!)^2} + \frac{3^4}{4^2 \cdot (2!)^2} - \frac{3^6}{4^3 \cdot (3!)^2} = 1 - \frac{9}{4} + \frac{81}{64} - \frac{729}{64 \cdot 36} \simeq -0,300\,781...$$

On conclut :

$$\boxed{J(3) \simeq -0,3 \text{ à } 10^{-1} \text{ près}}$$

• Puisque $J(2) > 0$, $J(3) < 0$ et que J est continue sur l'intervalle $[2\,;3]$, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, J admet au moins un zéro dans $]2\,;3[$.

I.1.d. On a, d'après 1.a. : $xJ'' + J' + xJ = 0$,

d'où, en multipliant par J' et en divisant par x, pour $x \in]0\,;+\infty[$: $J'J'' + \dfrac{1}{x}J'^2 + JJ' = 0$.

Ceci montre :

$$\frac{1}{2}(J^2 + J'^2)' = JJ' + J'J'' = -\frac{J'^2}{x} \leqslant 0.$$

Il en résulte que $J^2 + J'^2$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

Comme de plus $J^2 + J'^2$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, on conclut :

$$\boxed{J^2 + J'^2 \text{ est décroissante sur } [0\,;+\infty[}$$

I.2. Puisque l'application $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue et décroissante sur $[1\,;+\infty[$, on a, par **comparaison série/intégrale** :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire :

$$\ln(n+1) \leqslant \mathrm{H}_n \leqslant 1 + \ln n.$$

Comme $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\infty}{\sim} \ln n$ et que $1 + \ln n \underset{n\infty}{\sim} \ln n$, on conclut, par encadrement :

$$\boxed{\mathrm{H}_n \underset{n\infty}{\sim} \ln n}$$

I.3.a. Soit $K :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable. On note :

$$H :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto H(x) = (\ln x)J(x) + K(x).$$

Par opérations, H est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$\begin{cases} H(x) = (\ln x)J(x) + K(x) \\ H'(x) = (\ln x)J'(x) + \dfrac{1}{x}J(x) + K'(x) \\ H''(x) = (\ln x)J''(x) + \dfrac{2}{x}J'(x) - \dfrac{1}{x^2}J(x) + K''(x). \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
& H \text{ est solution de (E) sur }]0\,;+\infty[\\
\iff \quad & \forall x \in]0\,;+\infty[, \quad xH''(x) + H'(x) + xH(x) = 0 \\
\iff \quad & \forall x \in]0\,;+\infty[, \quad (\ln x)(xJ''(x) + J'(x) + xJ(x)) + 2J'(x) + xK''(x) + K'(x) + xK(x) = \\
\iff \quad & \forall x \in]0\,;+\infty[, \quad xK''((x) + K'(x) + xK(x) = -2J'(x) \\
\iff \quad & K \text{ est solution de (F) sur }]0\,;+\infty[.
\end{aligned}$$

I.3.b. La méthode est la même que dans la résolution de 1.a.

Soit $y : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ une application développable en série entière en 0, de rayon $R > 0$.

On a, pour tout $x \in]-R\,;R[$:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n, \qquad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n x^{n-1}, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) b_n x^{n-2}.$$

On en déduit, pour tout $x \in]-R\,;R[$, comme en 1.a. :

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = b_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)^2 b_{n+1} + b_{n-1})x^n.$$

D'autre part : $\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad J'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} 2n x^{2n-1}.$

Par unicité du développement en série entière en 0 de $-2J'$, on, déduit :

$$y \text{ est solution de (F) sur }]-R\,;R[$$

$$\iff \quad \Big(b_1 = 0 \ \text{ et } \ \begin{cases} \forall\, p \in \mathbb{N}, & (2p+1)^2 b_{2p+1} + b_{2p-1} = 0 \\ \forall\, p \in \mathbb{N}^*, & (2p)^2 b_{2p} + b_{2p-2} = -2\dfrac{(-1)^p}{4^p (p!)^2} 2p \end{cases}\Big)$$

$$\iff \quad \Big((\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad b_{2p+1} = 0) \ \text{ et } \ (\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad (2p)^2 b_{2p} + b_{2p-2} = -\frac{(-1)^p 4p}{4^p (p!)^2}. \quad (1) \quad)\Big)$$

Notons, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $c_{2p} = \dfrac{4^p (p!)^2}{(-1)^p} b_{2p}$, de sorte que : $b_{2p} = \dfrac{(-1)^p}{4^p (p!)^2} c_{2p}$.

On a :

$$(1) \iff (2p)^2 \frac{(-1)^p}{4^p (p!)^2} c_{2p} + \frac{(-1)^{p-1}}{4^{p-1} \big((p-1)!\big)^2} c_{2p-2} = -\frac{(-1)^p 4p}{4^p (p!)^2}$$

$$\iff 4p^2 c_{2p} - 4p^2 c_{2p-2} = -4p \iff c_{2p} - c_{2p-2} = -\frac{1}{p}.$$

On obtient alors, par sommation, et avec équivalence logique :

$$c_{2p} - c_0 = (c_{2p} - c_{2p-2}) + \cdots + (c_2 - c_0) = -\frac{1}{p} - \cdots - 1 = -\mathrm{H}_p.$$

Ainsi, si y est développable en série entière en 0, y est solution de (F) si et seulement si :

$$\forall\, x \in]-R\,;R[, \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} (c_0 - \mathrm{H}_n) x^{2n}, \quad c_0 \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, considérons la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n (c_0 - \mathrm{H}_n)}{4^n (n!)^2} x^{2n}$.

On sait déjà que la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Notons, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ fixé et tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} \mathrm{H}_n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$.

On a $|v_n(x)| > 0$ et :

$$\frac{|v_{n+1}(x)|}{|v_n(x)|} = \frac{\mathrm{H}_{n+1} x^{2(n+1)}}{4^{n+1} \big((n+1)!\big)^2} \cdot \frac{4^n (n!)^2}{\mathrm{H}_n x^{2n}} = \frac{\mathrm{H}_{n+1}}{\mathrm{H}_n} \cdot \frac{x^2}{4(n+1)^2}.$$

Comme $\mathrm{H}_n \underset{n\infty}{\sim} \ln n$, on a $\mathrm{H}_{n+1} \underset{n\infty}{\sim} \ln(n+1) = \ln + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n\infty}{\sim} \ln n$, donc $\dfrac{\mathrm{H}_{n+1}}{\mathrm{H}_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1$, puis $\dfrac{|v_{n+1}(x)|}{|v_n(x)|} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} v_n(x)$ converge, et il en résulte que la série entière envisagée est de rayon infini.

On conclut :

Les solutions de (F) développables en série entière en 0 sont les applications $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(c_0 - \mathrm{H}$

$c_0 \in \mathbb{R}$, le rayon est infini, et ces fonctions sont solutions de (F) sur $\mathbb{R}$.

I.3.c. D'après 3.a. et le résultat de 3.b., on conclut :

$$\boxed{H :]0\,;+\infty[\ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto H(x) = (\ln x)J(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\mathrm{H}_n}{4^n(n!)^2} x^{2n} \ \text{ est solution de (E) sur } \mathbb{R}}$$

I.3.d. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda J + \mu H = 0$, c'est-à-dire : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ \ \lambda J(x) + \mu H(x) = 0$.

On a vu que J est continue en 0 et que $J(0) = 1$.

D'autre part, l'application $K : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\mathrm{H}_n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc est continue en 0. Il en résulte : $H(x) = (\ln x) J(x) + K(x) \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} -\infty$.

Si $\mu \neq 0$, alors $\lambda J(x) + \mu H(x) \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} \pm\infty$, contradiction.

Donc $\mu = 0$, puis $\lambda J = 0$. En particulier, $\lambda J(0) = 0$, donc, comme $J(0) = 1$, on conclut $\lambda = 0$.

Ceci montre que (J, H) est libre dans $\mathbb{R}^{]0\,;+\infty[}$.

I.3.e. Puisque (E) $\ y'' + \dfrac{1}{x} y' + y = 0$, est une équation différentielle linéaire du second ordre, normalisée sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et à coefficients continus sur $]0\,;+\infty[$, d'après le Cours, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) sur $]0\,;+\infty[$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Comme J et H sont dans $\mathcal{S}$ et que (J, H) est libre, on conclut que (J, H) est une base de $\mathcal{S}$, autrement dit :

$$\boxed{\text{La solution générale de (E) sur }]0\,;+\infty[\text{ est } \lambda J + \mu H,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$$

I.4.a. On a, dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$: $\ (\mathrm{X}+1)^n (\mathrm{X}+1)^n = (\mathrm{X}+1)^{2n}$.

On en déduit, en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \mathrm{X}^k\Big)\Big(\sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p \mathrm{X}^p\Big) = \sum_{q=0}^{2n} \mathrm{C}_{2n}^q \mathrm{X}^q.$$

En prenant le coefficient de X^n dans chacun des deux membres, on obtient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_n^{n-k} = \mathrm{C}_{2n}^n$.

Comme $\mathrm{C}_n^{n-k} = \mathrm{C}_n^k$, on conclut :

$$\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{C}_n^k)^2 = \mathrm{C}_{2n}^n.$$

I.4.b. En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ a_n = \dfrac{(-1)^n}{4^n (n!)^2}$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $J(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$,

d'où, par **produit de deux séries entières**, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ \big(J(x)\big)^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n}$, où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{4^{n-k}\big((n-k)!\big)^2} = \frac{(-1)^n}{4^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2 \big((n-k)!\big)^2}$$

$$= \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{n!}{k!(n-k)!}\Big)^2 = \frac{-1)^n}{4^n (n!)^2} \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{C}_n^k)^2 = \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} \mathrm{C}_{2n}^n = \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^4}.$$

On conclut :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (J(x))^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^4} x^{2n}.}$$

PARTIE II

II.1.a. On a, par une **intégration par parties**, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t \sin t \, \mathrm{d}t \\ &= \left[\sin^{2n+1} t(-\cos t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2n+1)\sin^{2n} t \cos t(-\cos t)\, \mathrm{d}t \\ &= (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \cos^2 t \, \mathrm{d}t = (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t(1-\sin^2 t)\, \mathrm{d}t \\ &= (2n+1)(W_n - W_{n+1}), \end{aligned}$$

d'où le résultat demandé :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 2(n+1)W_{n+1} = (2n+1)W_n}$$

II.1.b. D'après 1.a., de proche en proche, ou par une récurrence immédiate, on a :

$$W_n = \frac{2n-1}{2n}W_{n-1} = \ldots = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 2}W_0 = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

II.2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

D'après I 1.a. et II 1.b., on a :

$$\begin{aligned} J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^{2n} &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{2}{\pi}\frac{W_n}{(2n)!}x^{2n} \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \, \mathrm{d}t\Big)x^{2n} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^n \sin^{2n} t \, x^{2n}}{(2n)!}\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad f_n : \Big[0\,;\frac{\pi}{2}\Big] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto f_n(t) = \dfrac{(-1)^n \sin^{2n} t \, x^{2n}}{(2n)!}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur le segment $\Big[0\,;\frac{\pi}{2}\Big]$.
- On a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \ \forall\, t \in \Big[0\,;\frac{\pi}{2}\Big], \quad |f_n(t)| \leqslant \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad ||f_n||_\infty \leqslant \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Comme la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge (par la règle de d'Alembert, par exemple), par théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} ||f_n||_\infty$ converge.

Ceci montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\Big[0\,;\frac{\pi}{2}\Big]$.

D'après un théorème du Cours sur **convergence uniforme et intégration sur un segment**, on peut donc permuter intégrale et série, d'où :

$$J(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin^{2n}t\,x^{2n}}{(2n)!}\Big)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(x\sin t)^{2n}}{(2n)!}\Big)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t,$$

en reconnaissant le développement en série entière de cos, qui est de rayon infini.
On conclut :

$$\boxed{\forall\, x\in\mathbb{R},\quad J(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t}$$

II.3. Notons :

$$F:\mathbb{R}\times\Big[0\,;\frac{\pi}{2}\Big]\longrightarrow\mathbb{R},\quad (x,t)\longmapsto F(x,t)=\cos(x\sin t).$$

• Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F(x,\cdot)$ est intégrable sur $\Big[0\,;\frac{\pi}{2}\Big]$, car continue sur ce segment.

• Pour tout $k\in\mathbb{N}$, l'application $\dfrac{\partial^k F}{\partial x^k}:(x,t)\longmapsto \sin^k t\cos\Big(x\sin t+k\dfrac{\pi}{2}\Big)$ existe et est continue par rapport à x et continue par morceaux (car continue) par rapport à t, sur $\mathbb{R}\times\Big[0\,;\dfrac{\pi}{2}\Big]$.

• On a :

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\ \forall\,(x,t)\in\mathbb{R}\times\Big[0\,;\frac{\pi}{2}\Big],\quad \Big|\frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)\Big|=\Big|\sin^k t\cos\Big(x\sin t+k\frac{\pi}{2}\Big)\Big|\leqslant 1$$

et l'application constante 1 est intégrable sur le segment $\Big[0\,;\dfrac{\pi}{2}\Big]$.

D'après le **théorème de dérivation sous le signe $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ avec hypothèse de domination**, on conclut que J est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (ce que l'on savait déjà, cf. I 1.b.) et que :

$$\boxed{\forall\, k\in\mathbb{N},\ \forall\, x\in\mathbb{R},\quad J(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^k t\cos\Big(x\sin t+k\frac{\pi}{2}\Big)\,\mathrm{d}t}$$

II.4. • D'après 3. :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad J'(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos\Big(x\sin t+\frac{\pi}{2}\Big)\,\mathrm{d}t=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\sin(x\sin t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $x\in]0\,;\pi]$ fixé.
L'application $t\longmapsto \sin t\sin(x\sin t)$ est continue sur $\Big[0\,;\dfrac{\pi}{2}\Big]$, positive ou nulle car $x\sin t\in[0\,;\pi]$ et n'est pas la fonction nulle, donc $J'(x)<0$.
Comme J est de plus continue sur $[0\,;\pi]$, on conclut :

$$\boxed{J \text{ est strictement décroissante sur } [0\,;\pi]}$$

• D'après 3. :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J''(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos(x \sin t + \pi)\, \mathrm{d}t = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos(x \sin t)\, \mathrm{d}t.$$

Soit $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ fixé.

On a : $\forall t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right], \quad x \sin t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, donc : $\forall t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right], \quad \cos(x \sin t) \geqslant 0$, d'où $J''(x) \leqslant 0$.

On conclut :

$$\boxed{J \text{ est concave sur } \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]}$$

•

II.5. On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad |J^{(k)}(x)| = \frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k t \cos\left(x \sin t + k\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin^k t \cos\left(x \sin t + k\frac{\pi}{2}\right)\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, \mathrm{d}t = 1.$$

II.6.a. Le résultat demandé est un exercice classique, appelé **lemme de Riemann-Lebesgue dans le cas d'un intervalle quelconque**.

Soit $\varphi : [0\,;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et intégrable sur $[0\,;1[$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall u \in [0\,;1[, \quad |\cos(xu)\varphi(u)| \leqslant |\varphi(u)|.$$

Comme φ est intégrable sur $[0\,;1[$, il en résulte par théorème de majoration que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \longmapsto \cos(xu)\varphi(u)$ est intégrable sur $[0\,;1[$.

Puisque φ est intégrable sur $[0\,;1[$, il existe $\alpha \in [0\,;1[$ tel que : $\displaystyle\int_\alpha^1 |\varphi(u)|\, \mathrm{d}u \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Big|\int_\alpha^1 \cos(xu)\varphi(u)\,\mathrm{d}u\Big| \leqslant \int_\alpha^1 |\cos(xu)\varphi(u)|\,\mathrm{d}u \leqslant \int_\alpha^1 |\varphi(u)|\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ensuite, pour $x \in]0\,;+\infty[$, on a, par une **intégration par parties** pour des fonctions de classe C^1 sur le segment $[0\,;\alpha]$:

$$\int_0^\alpha \cos(xu)\varphi(u)\,\mathrm{d}u = \Big[\frac{\sin(xu)}{x}\varphi(u)\Big]_0^\alpha - \int_0^\alpha \frac{\sin(xu)}{x}\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \frac{\sin(x\alpha)}{x}\varphi(\alpha) - \frac{1}{x}\int_0^\alpha \sin(xu)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u,$$

d'où, par inégalité triangulaire et majoration de la valeur absolue d'une intégrale :

$$\Big|\int_0^\alpha \cos(xu)\varphi(u)\,\mathrm{d}u\Big| \leqslant \frac{|\varphi(\alpha)|}{x} + \frac{1}{x}\int_0^\alpha |\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u.$$

Comme cette dernière expression tend vers 0 lorsque $x \longrightarrow +\infty$, il existe $A \in]0\,;+\infty[$ tel que :

$$\forall\, x \geqslant A,\quad \frac{1}{x}\Big(|\varphi(\alpha)| + \int_0^\alpha |\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u\Big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On, a alors, en utilisant la relation de Chasles :

$$\forall\, x \geqslant A,\ \Big|\int_0^1 \cos(xu)\varphi(u)\,\mathrm{d}u\Big| \leqslant \Big|\int_0^\alpha \cos(xu)\varphi(u)\,\mathrm{d}u\Big| + \Big|\int_\alpha^1 \cos(xu)\varphi(u)\,\mathrm{d}u\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On conclut :

$$\boxed{\int_0^1 \cos(xu)\varphi(u)\,\mathrm{d}u \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Il est clair que, de même :

$$\boxed{\int_0^1 \sin(xu)\varphi(u)\,\mathrm{d}u \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0}$$

II.6.b. Soit $k \in \mathbb{N}$.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par le changement de variable $u = \sin t$, dans le cas, par exemple, où k est pair, $k = 2p, p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} J^{(k)}(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k t \cos\Big(x\sin t + k\frac{\pi}{2}\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}(-1)^p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} t\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}(-1)^p\int_0^1 \cos(xu)\frac{u^{2p}}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

L'application $\varphi : [0\,;1[\longrightarrow \mathbb{R},\quad u \longmapsto \dfrac{u^{2p}}{\sqrt{1-u^2}}$ est de classe C^1 et intégrable sur $[0\,;1[$ car $\varphi(u) \underset{u \longrightarrow 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}(1-u)^{1/2}}$, en utilisant l'exemple de Riemann en 1 et le théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$.

Le cas où k est impair se traite de façon analogue.

On peut donc appliquer 6.a. et conclure :

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N},\quad J^{(k)}(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0}$$

PARTIE III

III.1.a. Soit $p \in]0\,;+\infty[$. Notons $u : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto u(x) = J(x)\,\mathrm{e}^{-px}$.

L'application, u est continue sur $[0\,;+\infty[$ et, d'après II 5.a. : $\forall x \in \mathbb{R},\quad |u(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-px}$.

Comme $p > 0$ est fixé, l'application $x \longmapsto \mathrm{e}^{-px}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$, donc, par théorème de majoration, l'application u est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

On peut donc définir la transformée de Laplace L de J :

$$L :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad p \longmapsto L(p) = \int_0^{+\infty} J(x)\,\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x.$$

III.1.b. On a, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$L(p) = \int_0^{+\infty} J(x)\,\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin t)\,\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Puisque : $\qquad \forall\,(x,t) \in [0\,;+\infty[\times\Big[0\,;\dfrac{\pi}{2}\Big],\quad |\cos(x\sin t)\,\mathrm{e}^{-px}| \leqslant \mathrm{e}^{-px},$

et que l'application $(x,t) \longmapsto \mathrm{e}^{-px}$ est $\geqslant 0$ et intégrable sur le pavé $[0\,;+\infty[\times[0\,;\dfrac{\pi}{2}\Big]$, par théorème de majoration, l'application $(x,t) \longmapsto \cos(x\sin t)\,\mathrm{e}^{-px}$ est intégrable sur ce même pavé, donc, d'après le **théorème de Fubini**, on peut permuter les deux intégrales et on obtient :

$$L(p) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{+\infty} \cos(x\sin t)\,\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t.$$

III.2.a. Soit $(p,x) \in]0\,;+\infty[\times[0\,;+\infty[$.

On a, en passant par les nombres complexes et en manipulant des intégrales de fonctions intégrables :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin t}\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-p+\mathrm{i}\sin t)x}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{\mathrm{e}^{(-p+\mathrm{i}\sin t)x}}{-p+\mathrm{i}\sin t}\Big]_0^{+\infty} = -\frac{1}{-p+\mathrm{i}\sin t} = \frac{p+\mathrm{i}\sin t}{p^2+\sin^2 t},$$

puis, en prenant la partie réelle : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x\sin t)\,\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x = \frac{p}{p^2+\sin^2 t}}$

III.2.b. On a donc, pour tout $p \in]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned}
L(p) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{p}{p^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \underset{[u=\tan t]}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{p}{p^2+\Big(1-\dfrac{1}{1+u^2}\Big)}\,\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{p}{p^2(1+u^2)+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{p}{p^2+(p^2+1)u^2}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{2}{\pi p}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\Big(\dfrac{\sqrt{p^2+1}}{p}u\Big)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi p}\Big[\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\,\mathrm{Arctan}\,\Big(\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}u\Big)\Big]_0^{+\infty}
\end{aligned}$$

$$= \quad \frac{2}{\pi p} \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \frac{\pi}{2} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Finalement : $$\boxed{\forall\, p \in \,]0\,;+\infty[, \quad L(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}}$$

PARTIE IV

IV.1. Puisque $x \longmapsto \sqrt{x}$ et J sont de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$, par produit, G est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$, donc, en particulier, G est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$G(x) = \sqrt{x}\, J(x)$$

$$G'(x) = \sqrt{x}\, J'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} J(x),$$

$$G''(x) = \sqrt{x}\, J''(x) + \frac{1}{\sqrt{x}} J'(x) - \frac{1}{4x\sqrt{x}} J(x),$$

d'où :

$$G''(x) + \Big(1 + \frac{1}{4x^2}\Big) G(x) = \sqrt{x}\, J''(x) + \frac{1}{\sqrt{x}} J'(x) - \frac{1}{4x\sqrt{x}} J(x) + \sqrt{x}\, J(x) + \frac{1}{4x\sqrt{x}} J(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} (xJ''(x) + J'(x) + xJ(x)) = 0.$$

IV.2. Soit z_0 un zéro de J dans $]0\,;+\infty[$.

• Montrons : $J'z_0) \neq 0$. Raisonnons par l'absurde : supposons $J'(z_0) = 0$.
D'après le **théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire**, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall\, x \in]0\,;+\infty[, \quad y''(x) + \dfrac{1}{x} y'(x) + y(x) = 0 \\ y(z_0) = 0, \ y'(z_0) = 0 \end{cases}$$

admet une solution et une seule.
Mais J et 0 (application nulle) conviennent, donc J est nulle sur $]0\,;+\infty[$, contradiction évidente.

Ceci montre : $J'(z_0) \neq 0$.

• Supposons par exemple $J'(z_0) > 0$, le cas $J'(z_0) < 0$ se traiterait de façon analogue.

Puisque $\dfrac{J(z) - J(z_0)}{z - z_0} \underset{z \longrightarrow z_0}{\longrightarrow} J'(z_0) > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall\, z \in]z_0 - \alpha\,; z_0 + \alpha[- \{z_0\}, \quad \frac{J(z) - J(z_0)}{z - z_0} > 0.$$

Il en résulte :

$$\begin{cases} \forall\, z \in]z_0 - \alpha\,; z_0[, \quad J(z) < J(z_0) = 0 \\ \forall\, z \in]z_0\,; z_0 + \alpha[, \quad J(z) > J(z_0) = 0. \end{cases}$$

En particulier :

$$\forall\, z \in]z_0 - \alpha\,; z_0 + \alpha[- \{z_0\}, \quad J(z) \neq 0.$$

On conclut :

$$\boxed{\text{Les zéros de } J \text{ dans }]0\,;+\infty[\text{ sont isolés}}$$

IV.3.a. Puisque G est continue sur l'intervalle I_k° et que G ne s'annule en aucun point de I_k° (par hypothèse), d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, G est de signe strict fixe sur I_k°.

IV.3.b. • Puisque G est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$, par opérations usuelles, W est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$W'(x) = (\sin x)G''(x)+(\cos x)G'(x)+(\sin x)G(x)-(\cos x)G'(x) = \sin x(G''(x)+G(x)) = -\frac{\sin x}{4x^2}G(x$$

En particulier :

$$\forall\, x \in I_k, \quad W'(x) = -\frac{\sin x}{4x^2}G(x).$$

Comme G est de signe fixe (large) sur I_k et que sin est aussi de signe fixe (large) sur I_k, on en déduit que W' est de signe fixe (large) sur I_k, et donc W est monotone sur I_k.

• On a :

$$W(k\pi) = -\cos(k\pi)G(k\pi) = (-1)^{k+1}G(k\pi)$$

et

$$W((k+1)\pi) = -\cos\left((k+1)\pi\right)G((k+1)\pi) = (-1)^k G((k+1)\pi).$$

• Séparons l'étude en quatre cas selon la parité de k et selon le signe de G sur I_k.

Par exemple, si k est pair et si G est $\geqslant 0$ sur I_k, alors, d'après le calcul de W' fait plus haut, W est décroissante, et, d'autre part, $W(k\pi) \leqslant 0$ et $W((k+1)\pi) \geqslant 0$. Il en résulte clairement que W est nulle sur I_k.

Les trois autres acs se traitent de façon analogue et aboutissent à la même conclusion : W est nulle sur I_k.

IV.3.c. On a donc :

$$\forall\, x \in I_k, \quad (\sin x)G'(x) - (\cos x)G(x) = W(x) = 0.$$

L'application $U : x \longmapsto \dfrac{G(x)}{\sin x}$ est dérivable sur I_k° et :

$$\forall\, x \in I_k^\circ, \quad U'(x) = \frac{(\sin x)G'(x) - (\cos x)G(x)}{\sin^2 x} = \frac{W(x)}{\sin^2 x} = 0,$$

donc U est constante sur I_k°.

Il existe donc $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\, x \in I_k^\circ, \quad \dfrac{G(x)}{\sin x} = \lambda_k$, c'est-à-dire $G(x) = \lambda_k \sin x$.
On déduit, en utilisant l'équation différentielle satisfaite par G :

$$\forall\, x \in I_k^\circ, \quad 0 = G''(x) + \Big(1 + \frac{1}{4x^2}\Big)G(x) = -\lambda_k \sin x + \Big(1 + \frac{1}{4x^2}\Big)\lambda_k \sin x = \frac{\lambda_k \sin x}{4x^2},$$

d'où :

$$\forall\, x \in I_k^\circ, \quad \lambda_k \sin x = 0.$$

On en déduit, puisque sin ne s'annule pas en au moins un point de I_k°, que $\lambda_k = 0$, d'où $G(x) = 0$ pour tout $x \in I_k^\circ$, contradiction avec une hypothèse faite plus haut.

On conclut :

$$\boxed{G \text{ s'annule en au moins un point de } I_k^\circ}$$

IV.4 Notons $Z = \{x \in]0\,;+\infty[\,;\ J(z) = 0\}$.

On a déjà vu que J ne s'annule en aucun point de $[0;1]$. On a donc : $Z = \{z \in [1\,;+\infty[\,;\ J(z) = 0\}$.

Soit $\lambda \in [1\,;+\infty[$. Montrons que $Z \cap [1\,;\lambda]$ est fini.

Raisonnons par l'absurde : Supposons $Z \cap [1\,;\lambda]$ infini.

D'après le **théorème de Bolzano-Weierstrass**, il existe alors une suite $(u_k)_{k\geqslant 1}$ dans $Z \cap [1\,;\lambda]$ convergeant vers un élément u de $Z \cap [1\,;\lambda]$ et à termes tous distincts de u.

Puisque $u_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} u$, que J s'annule en les u_k et que J est continue en u, il en résulte $J(u) = 0$.

Mais alors u est un zéro de J dans $]0\,;+\infty[$ non isolé, contradiction avec le résultat précédent.

Ceci montre que $Z \cap [1\,;\lambda]$ est fini.

Il est alors clair que l'on peut ordonner les zéros de J dans $]0\,;+\infty[$ en une suite $(z_k)_{k\geqslant 1}$ strictement croissante et de limite $+\infty$.

IV.5.

* *