Préparation à l'agrégation interne de Mathématiques 2007-2008

Jean-Marie Monier

Corrigé de l'épreuve d'entraînement du 8 décembre 2007

I. Étude d'une loi de composition interne dans $\mathbb{R}_+$

1. *a)* • Il est clair que, pour tout $(a,b) \in \big(\mathbb{R}_+\big)^2$, $a * b$ existe et $a * b \in \mathbb{R}_+$. Donc $*$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{R}_+$.

• La commutativité de $*$ est évidente.

• Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}_+)^3$.

◇ Si $a = 0$, alors : $(a*b)*c = 0*c = 0$ et $a*(b*c) = 0*(b*c) = 0$.

◇ Si $a \neq 0$ et $b = 0$, alors : $(a*b)*c = 0*c = 0$ et $a*(b*c) = a*0 = 0$.

◇ Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors :

$$(a*b)*c = \frac{ab}{a+b} * c = \frac{\dfrac{ab}{a+b}c}{\dfrac{ab}{a+b}+c} = \frac{abc}{ab+ac+bc}$$

$$a*(b*c) = a * \frac{bc}{b+c} = \frac{a\dfrac{bc}{b+c}}{a+\dfrac{bc}{b+c}} = \frac{abc}{ab+ac+bc}.$$

On conclut : $*$ est associative.

• Supposons que $*$ admette un élément neutre $e \in \mathbb{R}_+$. Alors, en particulier : $e * 1 = 1$, d'où $\dfrac{e}{e+1} = 1$, contradiction.
Donc $*$ n'admet pas d'élément neutre.

b) Soit $(a,b,c) \in \big(\mathbb{R}_+\big)^3$.

• Si $c = 0$, alors $(a*b)c = 0$ et $(ac)*(bc) = 0*0 = 0$.

• Si $c \neq 0$ et $(a,b) = (0,0)$, alors $(a*b)c = 0*c = 0$ et $(ac)*(bc) = 0*0 = 0$.

• Si $c \neq 0$ et $(a,b) \neq (0,0)$, alors $(ac,bc) \neq (0,0)$, et on a :

$$(ac)*(bc) = \frac{(ac)(bc)}{ac+bc} = \frac{ab}{a+b}c = (a*b)c.$$

On conclut :

$$\forall\,(a,b,c) \in \big(\mathbb{R}_+\big)^3,\ \ (a*b)c = (ac)*(bc).$$

2. Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}_+^*$. Remarquons d'abord qu'on peut utiliser la notation $a_1 * ... * a_n$ sans parenthésage puisque, d'après 1., $*$ est associative. Il est clair que, puisque $a_1, ..., a_n$ sont tous non nuls, d'après la définition de la loi $*$, $a_1 * ... * a_n$ n'est pas nul et, par réduction au même dénominateur :

$$\frac{1}{a_1 * ... * a_n} = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n},$$

d'où :

$$a_1 * \cdots * a_n = \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}.$$

3. • Si $a = 0$, alors $a * \cdots * a = 0 = \dfrac{a}{n}$.

• Si $a \neq 0$, alors, d'après 2. : $a * \cdots * a = \dfrac{a^n}{na^{n-1}} = \dfrac{a}{n}$.

On conclut :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a \in \mathbb{R}_+,\ a * \cdots * a = \frac{a}{n}.$$

4. *a)* Soient $(a,b) \in \big(\mathbb{R}_+\big)^2$, $x \in \mathbb{R}_+$. La propriété est immédiate si $(a,b) = (0,0)$. Supposons $(a,b) \neq (0,0)$, donc $a + b > 0$. On a, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$ay^2 + b(x-y)^2 = (a+b)y^2 - 2bxy + bx^2 = (a+b)\left(y^2 - \frac{2b}{a+b}xy + \frac{b}{a+b}x^2\right)$$

$$= (a+b)\left(\left(y - \frac{b}{a+b}x\right)^2 - \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 x^2 + \frac{b}{a+b}x^2\right) = (a+b)\left(\left(y - \frac{b}{a+b}\right)^2 + \frac{ab}{(a+b)^2}x^2\right).$$

On a donc :

$$\operatorname*{Inf}_{(y,z)\in\mathbb{R}^2,\, y+z=x} (ay^2 + bz^2) = \operatorname*{Inf}_{y\in\mathbb{R}} (ay^2 + b(x-y)^2) = (a+b)\frac{ab}{(a+b)^2}x^2 = \frac{ab}{a+b}x^2 = (a*b)x^2.$$

b) • L'examen du cas $(a,b) = (0,0)$ est immédiat. Si $(a,b) \neq (0,0)$, d'après l'étude du *a)*, la borne inférieure est atteinte si et seulement si $y - \dfrac{b}{a+b}x = 0$. On résout alors le système d'équations :

$$\begin{cases} y + z = x \\ y = \dfrac{b}{a+b}x. \end{cases}$$

On conclut que l'ensemble des couples $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{cases} y_0 + z_0 = x \\ (a*b)x^2 = ay_0^2 + bz_0^2 \end{cases}$$

est :

$$\begin{cases} \{\left(\dfrac{b}{a+b}x, \dfrac{a}{a+b}x\right)\} & \text{si} \quad (a,b) \neq (0,0) \\ \{(y, x-y); y \in \mathbb{R}\} & \text{si} \quad (a,b) = (0,0). \end{cases}$$

II. Quelques propriétés des matrices symétriques réelles

1. *a)* Pour toute $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ (groupe orthogonal) et $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ (matrice diagonale réelle) telles que : $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

b) Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons $\Omega^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On a :

$$^{\mathrm{t}}XSX = {}^{\mathrm{t}}X(\Omega D \Omega^{-1})X = {}^{\mathrm{t}}(\Omega^{-1}X)D(\Omega^{-1}X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geqslant \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Comme Ω est orthogonale, on a : $\quad {}^{\mathrm{t}}XX = {}^{\mathrm{t}}(\Omega^{-1}X)(\Omega^{-1}X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^2.$

On déduit : $\quad {}^{\mathrm{t}}XSX \geqslant \lambda_0 \, {}^{\mathrm{t}}XX.$

c) • Soient $Y \in \mathrm{Im}\,(S)$, $Z \in \mathrm{Ker}\,(S)$. Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = SX$. On a :

$$^{\mathrm{t}}YZ = {}^{\mathrm{t}}(SX)Z = {}^{\mathrm{t}}X^{\mathrm{t}}SZ = {}^{\mathrm{t}}XSZ = {}^{\mathrm{t}}X(SZ) = 0,$$

donc Y est orthogonal à Z pour le produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

• D'autre part, en utilisant le théorème du rang et la dimension de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel dans un espace vectoriel euclidien:

$$\dim\big(\mathrm{Im}\,(S)\big) = n - \dim\big(\mathrm{Ker}\,(S)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}\,(S)\big)^{\perp}.$$

On conclut :
$$\mathrm{Im}\,(S) = \big(\mathrm{Ker}(S)\big)^{\perp}.$$

d) Soit $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.
D'après le théorème de réduction pour une matrice symétrique réelle, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = \Omega D \Omega^{-1}$, et on a : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) = \{\lambda_i \,;\, i \in \{1, ..., n\}\}$.
On a, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$^{\mathrm{t}}XSX = {}^{\mathrm{t}}X(\Omega D \Omega^{-1})X = {}^{\mathrm{t}}(\Omega^{-1}X)D(\Omega^{-1}X).$$

Comme l'application $X \longmapsto \Omega^{-1}X$ est une bijection de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur lui-même, on a :

$$S \in \mathbf{S}_n^{+} \iff \Big(\forall\, X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ {}^{\mathrm{t}}XSX \geqslant 0\Big) \iff \Big(\forall\, Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ {}^{\mathrm{t}}YDY \geqslant 0\Big)$$

$$\iff \Big(\forall\,(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geqslant 0\Big).$$

Si les λ_i sont tous $\geqslant 0$, alors, pour tout $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, la somme des $\lambda_i y_i^2$ est $\geqslant 0$.
Réciproquement, si, pour tout $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, la somme des $\lambda_i y_i^2$ est $\geqslant 0$, alors, en particulier en choisissant $y_i = 1$ si $i = k$ et $y_i = 0$ si $i \neq k$, on déduit, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, que $\lambda_k \geqslant 0$.
On conclut :

$$S \in \mathbf{S}_n^{+} \iff \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \in \mathbb{R}_+.$$

On obtient de même :

$$S \in \mathbf{S}_n^{++} \iff \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \in \mathbb{R}_+^*.$$

e) Pour toute $S \in \mathbf{S}_n^{++}$, d'après le résultat précédent, 0 n'est pas valeur propre de S, donc S est inversible. On obtient :

$$\mathbf{S}_n^{++} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}).$$

2. *a)* Soit $S \in \mathbf{S}_n^+$. D'après 1. *a)* et *d)*, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = \Omega D \Omega^{-1}$ et : $\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \lambda_i \geqslant 0$. Considérons $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$ et $R = \Omega \Delta \Omega^{-1}$. On a :

• ${}^{\mathrm{t}}R = {}^{\mathrm{t}}(\Omega \Delta \Omega^{-1}) = {}^{\mathrm{t}}\Omega^{-1} \Delta\, {}^{\mathrm{t}}\Omega = \Omega \Delta \Omega^{-1} = R$, donc $R \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$

• $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(R) = \{\sqrt{\lambda_i}\,;\, 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset \mathbb{R}_+$, donc, puisque déjà R est symétrique, d'après 1. *d)*, $R \in \mathbf{S}_n^+$

• $R^2 = (\Omega \Delta \Omega^{-1})^2 = \Omega \Delta^2 \Omega^{-1} = \Omega D \Omega^{-1} = S$.

b) Soient $S \in \mathbf{S}_n^+$ et $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

• Si $SX = 0$, alors ${}^{\mathrm{t}}XSX = 0$.

• Réciproquement, supposons ${}^{\mathrm{t}}XSX = 0$. D'après *a)*, il existe $R \in \S_n^+$ telle que $S = R^2$. On a :

$$ {}^{\mathrm{t}}XSX = 0 \iff {}^{\mathrm{t}}XR^2X = 0 \iff {}^{\mathrm{t}}(RX)(RX) = 0 \iff RX = 0 \implies SX = R^2X = 0. $$

On conclut :

$$ {}^{\mathrm{t}}XSX = 0 \iff SX = 0. $$

3. Soit $(A, B) \in \left(\mathbf{S}_n^+\right)^2$.

a) • On a, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$ X \in \operatorname{Ker}(A) \cap \operatorname{Ker}(B) \iff \begin{cases} AX = 0 \\ BX = 0 \end{cases} \implies (A+B)X = AX + BX = 0 \iff X \in \operatorname{Ker}(A+B). $$

On a donc :

$$ \operatorname{Ker}(A) \cap \operatorname{Ker}(B) \subset \operatorname{Ker}(A+B). $$

• Réciproquement, soit $X \in \operatorname{Ker}(A+B)$. On a $(A+B)X = 0$, donc ${}^{\mathrm{t}}X(A+B)X = 0$. Mais :

$$ {}^{\mathrm{t}}X(A+B)X = {}^{\mathrm{t}}XAX + {}^{\mathrm{t}}XBX, \qquad {}^{\mathrm{t}}XAX \geqslant 0, \quad {}^{\mathrm{t}}XBX \geqslant 0, $$

donc ${}^{\mathrm{t}}XAX = 0$ et ${}^{\mathrm{t}}XBX = 0$, puis, d'après 2.*b)*, $AX = 0$ et $BX = 0$, donc $X \in \operatorname{Ker}(A) \cap \operatorname{Ker}(B)$.
On obtient : $\operatorname{Ker}(A+B) \subset \operatorname{Ker}(A) \cap \operatorname{Ker}(B)$.

Finalement :

$$ \operatorname{Ker}(A+B) = \operatorname{Ker}(A) \cap \operatorname{Ker}(B). $$

b) En utilisant 1. *c)*, le résultat précédent, le théorème du rang et une formule sur la dimension du supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien, on a :

$$ \operatorname{Im}(A+B) = \big(\operatorname{Ker}(A+B)\big)^{\perp} = \big(\operatorname{Ker}(A) \cap \operatorname{Ker}(B)\big)^{\perp} = \big(\operatorname{Ker}(A)\big)^{\perp} + \big(\operatorname{Ker}(B)\big)^{\perp} = \operatorname{Im}(A) + \operatorname{Im}(B). $$

4. Puisque S est symétrique : ${}^{\mathrm{t}}XSY = {}^{\mathrm{t}}YSX$. Puis, comme $SX = SY$, on a :

$$ {}^{\mathrm{t}}XSX = {}^{\mathrm{t}}XSY = {}^{\mathrm{t}}YSX = {}^{\mathrm{t}}YSY. $$

5. *a)* On a, pour tout $H \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$ \begin{aligned} f(X_0+H) &= {}^{\mathrm{t}}(X_0+H)S(X_0+H) - 2\,{}^{\mathrm{t}}U(X_0+H) = {}^{\mathrm{t}}X_0SX_0 + 2\,{}^{\mathrm{t}}X_0SH + {}^{\mathrm{t}}HSH - 2\,{}^{\mathrm{t}}UX_0 - 2\,{}^{\mathrm{t}}UH \\ &= {}^{\mathrm{t}}X_0SX_0 - 2\,{}^{\mathrm{t}}UX_0 + {}^{\mathrm{t}}HSH = f(X_0) + {}^{\mathrm{t}}HSH. \end{aligned} $$

b) D'après *a)*, puisque $S \in \mathbf{S}_n^+$:

$$ \forall H \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad f(X_0 + H) \geqslant f(X_0). $$

Puisque l'application $H \longmapsto X_0 + H$ est une bijection de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur lui-même, ceci montre que f admet une borne inférieure et que celle-ci est atteinte en X_0 (au moins).

III. Extension de la loi $*$ à des matrices symétriques positives

1. *a)* D'après II. 3. *b)*, $\mathrm{Im}\,(A+B) = \mathrm{Im}\,(A) + \mathrm{Im}\,(B)$, donc $\mathrm{Im}\,(B) \subset \mathrm{Im}\,(A+B)$. En notant $(\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_n)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\forall\, i \in \{1, ..., n\}, \quad B\mathrm{E}_i \in \mathrm{Im}\,(B) \subset \mathrm{Im}(A+B).$$

Pour chaque $i \in \{1, ..., n\}$, il existe donc $F_i \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $B\mathrm{E}_i = (A+B)F_i$. Notons M la matrice carrée d'ordre n formée par la juxtaposition des colonnes $F_1, ..., F_n$ dans cet ordre. On a alors:

$$B = B\mathrm{I}_n = (A+B)M.$$

b) Soient $M', M'' \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B = (A+B)M' = (A+B)M''$.
On a :

$$(A+B)(M' - M'') = (A+B)M' - (A+B)M'' = 0.$$

Notons, pour $i \in \{1, ..., n\}$, C_i la i-ème colonne de $M' - M''$. On a donc :

$$\forall\, i \in \{1, ..., n\}, \quad (A+B)C_i = 0,$$

d'où, en utilisant II 3. *b)* :

$$\forall\, i \in \{1, ..., n\}, \quad C_i \in \mathrm{Ker}\,(A+B) = \mathrm{Ker}\,(A) \cap \mathrm{Ker}\,(B) \subset \mathrm{Ker}\,(A)$$

donc :

$$\forall\, i \in \{1, ..., n\}, \quad AC_i = 0,$$

puis $A(M' - M'') = 0$, et finalement $AM' = AM''$.
Ceci montre que le produit AM ne dépend pas du choix de la matrice carrée M telle que $B = (A+B)M$.

c) Avec les notations précédentes, on a:

$${}^{\mathrm{t}}MB = {}^{\mathrm{t}}M\big((A+B)M\big) = {}^{\mathrm{t}}M(A+B)M$$

d'où :

$$BM = {}^{\mathrm{t}}\big({}^{\mathrm{t}}MB\big) = {}^{\mathrm{t}}\big({}^{\mathrm{t}}M(A+B)M\big) = {}^{\mathrm{t}}M(A+B)M,$$

ce qui montre que ${}^{\mathrm{t}}MB$ est symétrique et que ${}^{\mathrm{t}}MB = BM$.
Ensuite : $AM = (A+B)M - BM = B - BM \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

d) • Si A et B sont inversibles, comme A et B sont dans $\mathbf{S}_n^+$, alors A et B sont dans $\mathbf{S}_n^{++}$, donc $A + B \in \mathbf{S}_n^{++}$ puis, d'après II 1. *e)* : $M = (A+B)^{-1}B$, donc M est inversible, et enfin $A * B = AM$ est inversible.

• Réciproquement, si $A * B$ est inversible, comme $A * B = AM$, A est inversible et M aussi, donc, puisque $B = (A+B)M$, B est inversible.

e) On suppose ici $n = 1$. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$, $A = (a)$, $B = (b) \in \mathbf{S}_1^+ \subset \mathbf{M}_1(\mathbb{R})$.
Si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors :

- d'après I : $a * b = \dfrac{ab}{a+b}$
- $A + B \in \mathbf{GL}_1(\mathbb{R})$ et $A * B = A(A+B)^{-1}B = (a)\left(\dfrac{1}{a+b}\right)(b) = \left(\dfrac{ab}{a+b}\right)$.

Si $(a, b) = (0, 0)$, alors $a * b = 0$, et avec les notations précédentes, $M = 0$, $A * B = AM = 0$.
Ainsi, la définition du III 1. généralise celle vue en I.

f) On cherche une matrice M carrée d'ordre 3 telle que $B = (A+B)M$. En notant $M = \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix}$,
on se ramène à un système d'équations :

$$B = (A+B)M \iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x + y + 2z = 1 \\ x + 3y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \ldots$$

Une solution est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

d'où :

$$A * B = AM = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. *a)* Soient $(A, B) \in \left(\mathbf{S}_n^+\right)^2$, $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Considérons l'application $f : \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad f(Y) = {}^{\mathrm{t}}YAY + {}^{\mathrm{t}}(X-Y)B(X-Y).$$

On a, pour tout $Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$f(Y) = {}^{\mathrm{t}}YAY + {}^{\mathrm{t}}XBX - {}^{\mathrm{t}}XBY - {}^{\mathrm{t}}YBX + {}^{\mathrm{t}}YBY = {}^{\mathrm{t}}Y(A+B)Y - 2\,{}^{\mathrm{t}}(BX)Y + {}^{\mathrm{t}}XBX.$$

D'après II 3. *b)* : $BX \in \mathrm{Im}\,(B) \subset \mathrm{Im}\,(A+B)$. On peut donc appliquer le résultat de II 5. : f admet une borne inférieure et celle-ci est atteinte en tout point Y_0 de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $BX = (A+B)Y_0$.
Notons M une matrice carrée d'ordre n telle que $B = (A+B)M$; on a alors $A * B = AM$.
Ainsi : $(A+B)MX = BX$, donc on peut choisir $Y_0 = MX$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(Y_0) &= {}^{\mathrm{t}}Y_0(A+B)Y_0 - 2\,{}^{\mathrm{t}}(BX)Y_0 + {}^{\mathrm{t}}XBX \\ &= {}^{\mathrm{t}}X\,{}^{\mathrm{t}}M(A+B)MX - 2\,{}^{\mathrm{t}}XBMX + {}^{\mathrm{t}}XBX = {}^{\mathrm{t}}X\big({}^{\mathrm{t}}M(A+B)M - 2BM + B\big)X. \end{aligned}$$

Mais on a vu $BM = {}^{\mathrm{t}}MB = {}^{\mathrm{t}}M(A+B)M$, d'où :

$${}^{\mathrm{t}}M(A+B)M - 2BM + B = AM = A * B.$$

Ainsi :

$$f(Y_0) = {}^{\mathrm{t}}X(A * B)X.$$

On conclut :

$${}^{\mathrm{t}}X(A * B)X = \operatorname*{Inf}_{Y+Z=X} \left({}^{\mathrm{t}}YAY + {}^{\mathrm{t}}ZBZ\right),$$

et cette borne inférieure est atteinte.

b) Soit $(A,B)\in\left(\mathbf{S}_n^+\right)^2$. On a alors :

$$\forall\,(Y,Z)\in\left(\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2,\quad {}^{\mathrm{t}}YAY+{}^{\mathrm{t}}ZBZ\geqslant 0,$$

d'où, en utilisant le résultat précédent :

$$\forall\,X\in\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad {}^{\mathrm{t}}XAX\geqslant 0,$$

ce qui montre que $A*B$, qui était déjà symétrique, est symétrique positive.

3. *a)* • D'après ce qui précède, la loi $*$ est une loi interne dans $\mathbf{S}_n^+$.

• Soit $(A,B)\in\left(\mathbf{S}_n^+\right)^2$. Il est clair que, dans le résultat de 2., on peut échanger Y et Z, et il s'ensuit que la loi $*$ est commutative.

• Soit $(A,B,C)\in\left(\mathbf{S}_n^+\right)^3$. On a, en utilisant le résultat de 2., pour tout $X\in\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
&{}^{\mathrm{t}}X\big((A*B)*C\big)X\\
=\ &\operatorname*{Inf}_{(Y,Z),\,Y+Z=X}\big({}^{\mathrm{t}}Y(A+B)Y+{}^{\mathrm{t}}ZCZ\big)\\
=\ &\operatorname*{Inf}_{(Y,Z),\,Y+Z=X}\left(\operatorname*{Inf}_{(U,V),\,U+V=Y}\Big(({}^{\mathrm{t}}UAU+{}^{\mathrm{t}}VBV)+{}^{\mathrm{t}}ZCZ\Big)\right)\\
=\ &\operatorname*{Inf}_{(U,V,Z)\,U+V+Z=X}\big({}^{\mathrm{t}}UAU+{}^{\mathrm{t}}VBV+{}^{\mathrm{t}}ZCZ\big)\\
=\ &\operatorname*{Inf}_{(U,W),\,U+W=X}\left(\operatorname*{Inf}_{(V,Z),\,V+Z=W}\big({}^{\mathrm{t}}UAU+({}^{\mathrm{t}}VBV+{}^{\mathrm{t}}ZCZ)\big)\right)\\
=\ &\operatorname*{Inf}_{(U,W),\,U+W=X}\big({}^{\mathrm{t}}UAU+{}^{\mathrm{t}}W(B*C)W\big)\ =\ {}^{\mathrm{t}}X\big(A*(B*C)\big)X.
\end{aligned}$$

On déduit : $A*(B*C)=(A*B)*C$ et on conclut que la loi $*$ est associative dans $\mathbf{S}_n^+$.

b) Soit $(A,B)\in\left(\mathbf{S}_n^+\right)^2$. Par définition de $A*B$, on a $A*B=AM$ où M est telle que $B=(A+B)M$.

• Puisque $A*B=AM$, on a $\mathrm{Im}\,(A*B)\subset\mathrm{Im}(A)$.

Comme $*$ est commutative, il en résulte que $\mathrm{Im}\,(A*B)=\mathrm{Im}\,(B*A)\subset\mathrm{Im}\,(B)$, et donc :

$$\mathrm{Im}\,(A*B)\subset\mathrm{Im}(A)\,\cap\,\mathrm{Im}\,(B).$$

• On a : $A*B={}^{\mathrm{t}}(A*B)={}^{\mathrm{t}}(AM)={}^{\mathrm{t}}MA$, donc $\mathrm{Ker}\,(A)\subset\mathrm{Ker}\,(A*B)$.

Par commutativité de $*$, on a alors $\mathrm{Ker}\,(B)\subset\mathrm{Ker}\,(A*B)$, et finalement :

$$\mathrm{Ker}\,(A)+\mathrm{Ker}\,(B)\subset\mathrm{Ker}(A*B).$$

4. Soit $(A,B) \in \left(\mathbf{S}_n^+\right)^2$ tel que $A+B \in \mathbf{S}_n^{++}$.
D'après II 1. *e)*, $A+B$ est inversible, donc, avec les notations de III 1.: $M=(A+B)^{-1}B$, puis :

$$A*B = AM = A(A+B)^{-1}B.$$

Puisque la loi $*$ est commutative, on a aussi :

$$A*B = B*A = B(B+A)^{-1}A = B(A+B)^{-1}A.$$

Puis :

$$B(A+B)^{-1}A = \big((A+B)-B\big)(A+B)^{-1}A = (A+B)(A+B)^{-1}A - A(A+B)^{-1}A = A - A(A+B)^{-1}A,$$

et enfin, en échangeant A et B:

$$A(A+B)^{-1}B = B - B(A+B)^{-1}B.$$

5. *a)* Soit $(A,B) \in \mathbf{S}_n^{++} \times \mathbf{S}_n^+$. Alors A est inversible (cf. II 1. *e)*), donc :

$$A*B = A(A+B)^{-1}B = A\big((\mathrm{I}_n + BA^{-1})A\big)^{-1}B = AA^{-1}(\mathrm{I}_n + BA^{-1})^{-1}B = (\mathrm{I}_n + BA^{-1})B.$$

b) Soit $(A,B) \in \left(\mathbf{S}_n^{++}\right)^2$. Alors A et B sont inversibles et :

$$A*B = (\mathrm{I}_n + BA^{-1})^{-1}B = \big(B(B^{-1}+A^{-1})\big)^{-1}B = (A^{-1}+B^{-1})^{-1}.$$

6. On a : $A+B = \mathrm{diag}\,(\lambda_1+\mu_1, ..., \lambda_n+\mu_n)$. Soit $i \in \{1,...,n\}$; notons :

$$m_i = \begin{cases} \dfrac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i} & \text{si} \quad \lambda_i+\mu_i \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad \lambda_i+\mu_i = 0, \end{cases}$$

et considérons la matrice diagonale $M = \mathrm{diag}\,(m_1,...,m_n)$. On a alors :

$$\forall\, i \in \{1,...,n\}, \quad (\lambda_i+\mu_i)m_i = \mu_i,$$

donc :

$$(A+B)M = B.$$

D'après III 1. :

$$A*B = AM = \mathrm{diag}\,(\lambda_1 m_1, ..., \lambda_n m_n).$$

Mais on remarque :

$$\forall\, i \in \{1,...,n\}, \quad \lambda_i m_i = \lambda_i * \mu_i.$$

on conclut :

$$A*B = \mathrm{diag}\,(\lambda_1 * \mu_1, ..., \lambda_n * \mu_n).$$

7. *a)* Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. D'après I 5. *a)* :

$$\begin{aligned}({}^{\mathrm{t}}XAX) * ({}^{\mathrm{t}}XBX) &= \operatorname*{Inf}_{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\,\lambda+\mu=1} \big(({}^{\mathrm{t}}XAX)\lambda^2 + ({}^{\mathrm{t}}XBX)\mu^2\big) \\ &= \operatorname*{Inf}_{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\,\lambda+\mu=1} \big({}^{\mathrm{t}}(\lambda X)A(\lambda X) + {}^{\mathrm{t}}(\mu X)B(\mu X)\big) \\ &\geqslant \operatorname*{Inf}_{(Y,Z)\in\left(\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2,\,Y+Z=X} ({}^{\mathrm{t}}YAY + {}^{\mathrm{t}}ZBZ) = {}^{\mathrm{t}}X(A*B)X,\end{aligned}$$

car $\lambda X + \mu X = X$ est un cas particulier de $Y + Z = X$.

b) Appliquons le résultat précédent aux matrices $A = \operatorname{diag}(a_1, ..., a_n)$, $B = \operatorname{diag}(b_1, ..., b_n)$ et au vecteur X de coordonnées toutes égales à 1. On obtient :

$${}^{\mathrm{t}}XAX = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad {}^{\mathrm{t}}XBX = \sum_{i=1}^{n} b_i, \quad {}^{\mathrm{t}}X(A*B)X = \sum_{i=1}^{n} (a_i * b_i)$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i * b_i) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) * \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

c) Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Soit $(Y, Z) \in \left(\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2$ tel que $Y + Z = X$.
On a, d'après III 2. :

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{t}}X(A*C)X \leqslant {}^{\mathrm{t}}YAY + {}^{\mathrm{t}}ZCZ \\ {}^{\mathrm{t}}X(B*D)X \leqslant {}^{\mathrm{t}}YBY + {}^{\mathrm{t}}ZDZ, \end{cases}$$

d'où :

$${}^{\mathrm{t}}X(A*C)X + {}^{\mathrm{t}}X(B*D)X \leqslant {}^{\mathrm{t}}YAY + {}^{\mathrm{t}}ZCZ + {}^{\mathrm{t}}YBY + {}^{\mathrm{t}}ZDZ.$$

D'après la définition d'une borne inférieure et le résultat de III 2., on a donc :

$${}^{\mathrm{t}}X(A*C)X + {}^{\mathrm{t}}X(B*D)X \leqslant \operatorname*{Inf}_{(Y,Z),\,Y+Z=X} \big({}^{\mathrm{t}}Y(A+B)Y + {}^{\mathrm{t}}Z(C+D)Z\big) = {}^{\mathrm{t}}X\big((A+B)*(C+D)\big)X.$$

d) Soit $(A, B) \in \left(\mathbf{S}_n^+\right)^2$.
Notons $(\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_n)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $a_i ={}^{\mathrm{t}} \mathrm{E}_i A \mathrm{E}_i$,
$b_i ={}^{\mathrm{t}} \mathrm{E}_i B \mathrm{E}_i$. Ainsi, a_i (resp. b_i) est le i-ème terme diagonal de A (resp. B). On a :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i, \qquad \operatorname{tr}(B) = \sum_{i=1}^{n} b_i, \qquad \operatorname{tr}(A*B) = \sum_{i=1}^{n} (a_i * b_i)$$

et les a_i et b_i sont tous $\geqslant 0$, donc d'après *b)* :

$$\operatorname{tr}(A*B) \leqslant \operatorname{tr}(A) * \operatorname{tr}(B).$$

8. *a)* Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$, $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$ tels que $AX = \lambda X$ et $BX = \mu X$.
Il existe $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = (A+B)M$, et, par définition, $A * B = AM \in \mathbf{S}_n^+$.
On a : $${}^{\mathrm{t}}M(A+B) = {}^{\mathrm{t}}\big((A+B)M\big) = {}^{\mathrm{t}}B = B,$$
d'où : ${}^{\mathrm{t}}M(A+B)X = BX$, et donc $(\lambda+\mu)\,{}^{\mathrm{t}}MX = \mu X$.
• Si $\lambda + \mu \neq 0$, alors ${}^{\mathrm{t}}MX = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}X$, et donc :
$$(A*B)X = (AM)X = {}^{\mathrm{t}}(AM)X = ({}^{\mathrm{t}}MA)X = {}^{\mathrm{t}}M(AX) = \lambda\,{}^{\mathrm{t}}MX = \lambda\frac{\mu}{\lambda+\mu}X,$$
ce qui montre que X est vecteur propre pour $A * B$, associé à la valeur propre $\lambda * \mu$.
• Si $\lambda + \mu = 0$, alors, comme $\lambda \geqslant 0$ et $\mu \geqslant 0$, on a $\lambda = \mu = 0$, d'où :
$$(A*B)X = AMX = {}^{\mathrm{t}}(AM)X = ({}^{\mathrm{t}}MA)X = {}^{\mathrm{t}}M(AX) = 0,$$
ce qui montre que X est vecteur propre pour $A * B$, associé à la valeur propre 0, qui est d'ailleurs ici $\lambda * \mu$.
On conclut que tout vecteur propre commun à A et B est vecteur propre de $A * B$.

b) 1re méthode
Par définition de ν, il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$ tel que $(A * B)X = \nu X$.
D'après III 2., il existe $(Y_0, Z_0) \in \big(\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2$ tel que :
$$\begin{cases} Y_0 + Z_0 = X \\ {}^{\mathrm{t}}X(A*B)X = {}^{\mathrm{t}}Y_0AY_0 + {}^{\mathrm{t}}Z_0BZ_0. \end{cases}$$
D'après II 1. *b)*, on a :
$$\begin{cases} {}^{\mathrm{t}}Y_0AY_0 \geqslant \lambda\,{}^{\mathrm{t}}Y_0Y_0 \\ {}^{\mathrm{t}}Z_0BZ_0 \geqslant \mu\,{}^{\mathrm{t}}Z_0Z_0. \end{cases}$$
D'où :
$$\nu\,{}^{\mathrm{t}}XX = {}^{\mathrm{t}}X(A*B)X = {}^{\mathrm{t}}Y_0AY_0 + {}^{\mathrm{t}}Z_0BZ_0 \geqslant \lambda\,{}^{\mathrm{t}}Y_0Y_0 + \mu\,{}^{\mathrm{t}}Z_0Z_0.$$
D'autre part, d'après I 4. *a)*, en notant $N = \sqrt{{}^{\mathrm{t}}XX}$, on a :
$$(\lambda*\mu)\,{}^{\mathrm{t}}XX = (\lambda*\mu)N^2 = \operatorname*{Inf}_{(y,z)\in\mathbb{R}^2,\, y+z=N} \big(\lambda y^2 + \mu z^2\big).$$
Or, le couple $\left(y_0 = \dfrac{1}{N}\,{}^{\mathrm{t}}Y_0X,\ z_0 = \dfrac{1}{N}\,{}^{\mathrm{t}}Z_0X\right)$ satisfait : $y_0 + z_0 = \frac{1}{N}\,{}^{\mathrm{t}}(Y_0+Z_0)X = \frac{1}{N}\,{}^{\mathrm{t}}XX = N$.
On a donc, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\begin{aligned}(\lambda*\mu)\,{}^{\mathrm{t}}XX \leqslant \lambda y_0^2 + \mu z_0^2 &= \frac{1}{N^2}\big(\lambda({}^{\mathrm{t}}Y_0X)^2 + \mu({}^{\mathrm{t}}Z_0X)^2\big) \\ &\leqslant \frac{1}{N^2}\big(\lambda({}^{\mathrm{t}}Y_0Y_0)({}^{\mathrm{t}}XX) + \mu({}^{\mathrm{t}}Z_0Z_0)({}^{\mathrm{t}}XX)\big) = \lambda\,{}^{\mathrm{t}}Y_0Y_0 + \mu\,{}^{\mathrm{t}}Z_0Z_0.\end{aligned}$$
On a prouvé ainsi : $\nu\,{}^{\mathrm{t}}XX \geqslant (\lambda*\mu)\,{}^{\mathrm{t}}XX$ et, comme ${}^{\mathrm{t}}XX > 0$, on peut simplifier et conclure : $\nu \geqslant \lambda * \mu$.

2è méthode

Si A ou B n'est pas inversible, alors $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$, donc $\lambda * \mu = 0$, et, comme $\nu \geqslant 0$, l'inégalité voulue est triviale.

Nous pouvons donc supposer A et B inversibles, c'est-à-dire, puisque A et B sont déjà symétriques positives:

$$A \in \mathbf{S}_n^{++},\ B \in \mathbf{S}_n^{++}.$$

Alors $\dfrac{1}{\lambda}$ (resp. $\dfrac{1}{\mu}$) est la plus grande valeur propre de A^{-1} (resp. B^{-1}), d'où, comme en II 1. *b)*, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$^{\mathrm{t}}XA^{-1}X \leqslant \frac{1}{\lambda}\,^{\mathrm{t}}XX \qquad \text{et} \qquad ^{\mathrm{t}}XB^{-1}X \leqslant \frac{1}{\mu}\,^{\mathrm{t}}XX.$$

D'autre part, d'après III 5. *b)* :

$$(A * B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1},$$

d'où, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$^{\mathrm{t}}X(A * B)^{-1}X = \,^{\mathrm{t}}XA^{-1}X + \,^{\mathrm{t}}XB^{-1}X \leqslant \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right)\,^{\mathrm{t}}XX = \frac{1}{\lambda * \mu}\,^{\mathrm{t}}XX.$$

Il en résulte facilement, puisque $(A * B)^{-1} \in \mathbf{S}_n^{++}$:

$$\mathrm{Sp}\big((A * B)^{-1}\big) \subset \left]0; \frac{1}{\lambda * \mu}\right].$$

Enfin, il est immédiat que, pour toute matrice $M \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, l'application $\lambda \longmapsto \dfrac{1}{\lambda}$ est une bijection de $\mathrm{Sp}(M)$ sur $\mathrm{Sp}(M^{-1})$, d'où :

$$\mathrm{Sp}(A * B) \subset [\lambda * \mu\,; +\infty[,$$

ce qui montre :

$$\nu \geqslant \lambda * \mu.$$

c) Prenons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors : $A, B \in \mathbf{S}_2^{+}$, $A + B = 3\mathrm{I}_2 \in \mathbf{S}_2^{++}$, donc :

$$A * B = A(A + B)^{-1}B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi : $\qquad \lambda = 1, \qquad \mu = 1, \qquad \nu = \dfrac{2}{3}, \qquad \lambda * \mu = 1 * 1 = \dfrac{1}{2},$

donc, dans cet exemple : $\qquad \nu > \lambda * \mu.$

* *