**Préparation à l'agrégation interne de Mathématiques 2006-2007**

**Jean-Marie Monier**

**Corrigé de l'épreuve d'entraînement du 13 janvier 2007**

## PARTIE I

**I.1.a.** Par lecture de la matrice $J$, on a :

$$\boxed{\nu(e_1) = 0, \quad \nu(e_2) = e_1, \quad \ldots, \nu(e_n) = e_{n-1}}$$

**I.1.b.** • Soient $x \in K^n$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On a :

$$x \in \mathrm{Ker}\,(\nu) \iff \nu(x) = 0 \iff JX = 0 \iff \begin{cases} x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases},$$

donc :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(\nu) = \mathrm{Vect}\,(e_1).}$$

• On a :

$$\mathrm{Im}\,(\nu) = \nu(K^n) = \mathrm{Vect}\,\big(\nu(e_1), \ldots, \nu(e_n)\big) = \mathrm{Vect}\,\big(0, e_1, \ldots, e_{n-1}\big) = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{n-1}).$$

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(\nu) = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{n-1})}$$

• Puis, comme $\mathrm{rg}\,(\nu) = \dim\big(\mathrm{Im}\,(\nu)\big)$, on conclut :

$$\boxed{\mathrm{rg}\,(\nu) = n - 1}$$

**I.2.** On a :

$$\chi_J(\lambda) = \det\,(J - \lambda \mathrm{I}_n) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & (0) & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^n.$$

$$\boxed{\chi_J(\lambda) = (-\lambda)^n}$$

**I.3.a.** • On a :

$$J^0 = \mathrm{I}_n,\ J^1 = J,\ J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & (0) & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \dots, J^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & (0) & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$J^n = 0$, puis $J^k = 0$ pour tout $k \geqslant n$.

• Il est alors clair que : $J^{n-1} \neq 0$ et $J^n = 0$, donc $J$ est nilpotente d'indice $n$.

• Il est immédiat, comme en 1.b., que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, avec les conventions $\mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_k) = K^n$ et $\mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_{n-k}) = \{0\}$ pour $k \geqslant n+1$ :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(\nu^k) = \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_k), \quad \mathrm{Im}\,(\nu^k) = \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_{n-k})}$$

• Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in K^n$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = 0$. On a alors $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_0 & \ddots & a_2 \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & a_1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \end{pmatrix} = 0,$
donc $a_0 = 0,\ \dots, a_{n-1} = 0$, et on conclut que la famille $(\mathrm{I}_n, J, \dots, J^{n-1})$ est libre.

• Puisque $J^n = 0$, le polynôme $\mathrm{X}^n$ est annulateur de $J$, donc, d'après le Cours : $\pi_J \mid \mathrm{X}^n$.

D'autre part, comme $(\mathrm{I}_n, J, \dots, J^{n-1})$ est libre, aucun polynôme de degré $\leqslant n-1$, autre que le polynôme nul, n'est annulateur de $J$, ce qui montre : $\deg(\pi_J) \geqslant n$.

Enfin, on sait que $\pi_J$ est unitaire.

On conclut :

$$\boxed{\pi_J = \mathrm{X}^n}$$

**I.3.b.** Soit $q \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

Supposons qu'il existe $M \in \mathbf{M}_n(K)$ telle que $M^q = J$.

Alors : $M^{qn} = (M^q)^n = J^n = 0$, donc $M$ est nilpotente. Il en résulte que $M^n = 0$, car le polynôme minimal de $M$ est de la forme $\mathrm{X}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$ et est de degré $\leqslant n$. Mais $(M^q)^{n-1} = J^{n-1} \neq 0$, donc $q(n-1) \leqslant n-1$, puis, comme $n \geqslant 2$, on déduit $q \leqslant 1$, contradiction.

On conclut que l'équation $M^q = J$, d'inconnue $M \in \mathbf{M}_n(K)$ n'a aucune solution.

**I.3.c.** Cherchons une solution particulière $M$ de la forme $M = aJ + bJ^2$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$M + M^2 = J \iff aJ + bJ^2 + (aJ + bJ^2)^2 = J \iff aJ + bJ^2 + a^2J^2 = J$$
$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ b + a^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1. \end{cases}$$

Ainsi, $M = J - J^2$ est solution de l'équation $M + M^2 = J$.

**I.4.a.** • Il est clair que $\mathrm{I}_n,\ J,\ \ldots,\ J^{n-1}$ commutent avec $J$, donc toute combinaison linéaire de ceux-ci commute avec $J$, d'où : $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n,\ J,\ \ldots,\ J^{n-1}) \subset \mathrm{C}\,(J)$.

• Soit $A \in \mathrm{C}\,(J)$. Notons $f$ (resp. $\nu$) l'endomorphisme de $K^n$ représenté par $A$ (resp. $J$) dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

On a :

$$A \in \mathrm{C}\,(J) \iff AJ = JA \iff f \circ \nu = \nu \circ f \iff \forall\, i \in \{1, \ldots, n\},\quad \nu \circ f(e_i) = f \circ \nu(e_i).$$

On a alors : $\nu\big(f(e_1)\big) = f\big(\nu(e_1)\big) = f(0) = 0$, donc $f(e_1) \in \mathrm{Ker}\,(\nu) = \mathrm{Vect}\,(e_1)$.

Il existe donc $a_1 \in K$ tel que $f(e_1) = a_1 e_1$.

Puis : $\nu\big(f(e_2)\big) = f\big(\nu(e_2)\big) = f(e_1) = a_1 e_1 = a_1 \nu(e_2) = \nu(a_1 e_2)$,

donc $f(e_2) - a_1 e_2 \in \mathrm{Ker}\,(\nu) = \mathrm{Vect}\,(e_1)$.

Il existe donc $a_2 \in K$ tel que : $f(e_2) - a_1 e_2 = a_2 e_1$, d'où : $f(e_2) = a_1 e_2 + a_2 e_1$.

Supposons $f(e_k) = a_1 e_k + \cdots + a_k e_1$ pour $k$ fixé. On a alors :

$$\nu\big(f(e_{k+1})\big) = f\big(\nu(e_{k+1})\big) = f(e_k) = a_1 e_k + \cdots + a_k e_1 = \nu(a_1 e_{k+1} + \cdots + a_k e_2),$$

donc :

$$f(e_{k+1}) - (a_1 e_{k+1} + \cdots + a_k e_2) \in \mathrm{Ker}\,(\nu) = \mathrm{Vect}\,(e_1).$$

Il existe donc $a_{k+1} \in K$ tel que : $f(e_{k+1}) - (a_1 e_{k+1} + \cdots + a_k e_2) = a_{k+1} e_1$,

d'où : $f(e_{k+1}) = a_1 e_{k+1} + \cdots + a_{k+1} e_1$.

On obtient alors :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & \ldots & a_n \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & a_2 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_1 \end{pmatrix} = a_1 \mathrm{I}_n + a_2 J + \cdots + a_n J^{n-1} \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n,\ J,\ \ldots,\ J^{n-1}).$$

On conclut :

$$\boxed{\mathrm{C}\,(J) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n,\ J,\ \ldots,\ J^{n-1})}$$

**I.4.b.** • Soit $A \in \mathrm{C}\,(J)$. Comme $\mathrm{C}\,(J) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n,\ J,\ \ldots,\ J^{n-1})$, $A$ est combinaison linéaire de puissances de $J$. Comme les puissances de $J$ commutent deux à deux, $A$ commute avec toute combinaison linéaire de puissances de $J$, donc $A \in \mathrm{C}\,\big(\mathrm{C}\,(J)\big)$.

• Réciproquement, soit $A \in \mathrm{C}\,\big(\mathrm{C}\,(J)\big)$. Alors $A$ commute avec toute combinaison linéaire de puissances de $J$, donc en particulier $A$ commute avec $J$, donc $A \in \mathrm{C}\,(J)$.

On conclut :

$$\boxed{\mathrm{C}\,\big(\mathrm{C}\,(J)\big) = \mathrm{C}\,(J)}$$

**I.4.c.** Notons $g$ l'endomorphisme de $K^n$ défini, sur la base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$, par :

$$g(e_1) = e_2, \qquad g(e_2) = ... = g(e_n) = 0,$$

et notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$.

On a :

$$g\big(\nu(e_2)\big) = g(e_1) = e_2 \quad \text{ et } \quad \nu\big(g(e_2)\big) = \nu(0) = 0,$$

donc $g \circ \nu \neq \nu \circ g$, donc $A$ ne commute pas avec $J$.

Mais : $g \circ \nu^2(e_1)$, $g \circ \nu^2(e_2)$, $...g \circ \nu^2(e_n)$, $\quad \nu^2 \circ g(e_1)$, $\nu^2 \circ g(e_2)$, $...\nu^2 \circ g(e_n)$ sont tous nuls, donc $g \circ \nu^2 = \nu^2 \circ g = 0$, $g$ et $\nu^2$ commutent, $A$ et $J^2$ commutent.

Ainsi : $A \in \mathrm{C}\,(J^2)$ et $A \notin \mathrm{C}\,(J)$, d'où :

$$\boxed{\mathrm{C}\,(J^2) \neq \mathrm{C}\,(J)}$$

**I.5.a.** On a, pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, avec la convention $\mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_{i-1}) = \{0\}$ pour $i = 0$ :

$$\nu(F_i) = \nu\big(\mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_i)\big) = \mathrm{Vect}\,\big(\nu(e_1), ...\nu(e_i)\big) = \mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_{i-1}) = F_{i-1} \subset F_i,$$

donc $F_i$ est stable par $\nu$.

**I.5.b.***1)* Considérons l'endomorphisme $h$ de $F$ induit par $\nu$ sur $F$.

Puisque $\nu^n = 0$, on a $h^n = 0$, donc $h$ est nilpotent.

On a : $\mathrm{Ker}\,(h) = \mathrm{Ker}\,(\nu) \cap F \subset \mathrm{Ker}\,(\nu) = \mathrm{Vect}\,(e_1)$.

Si $\mathrm{Ker}\,(h) = \{0\}$, alors $h$ est bijectif, et nilpotent, donc $F = \{0\}$, exclu.

Donc $\mathrm{Ker}\,(h) \neq \{0\}$, d'où $\mathrm{Ker}\,(h) = \mathrm{Vect}\,(e_1)$.

Ceci montre $e_1 \in \mathrm{Ker}\,(h) \subset F$.

Ainsi, l'ensemble $\big\{i \in \{1, ..., n\}\,;\, e_i \in F\big\}$ est une partie non vide de $\{1, ..., n\}$, donc admet un plus grand élément, noté $k$.

On a donc $e_k \in F$ et $e_{k+1}, ..., e_n \notin F$.

**I.5.b.***2)* • Puisque $e_k \in F$ et que $F$ est stable par $\nu$, on a :

$$e_{k-1} = \nu(e_k) \in F, \quad e_{k-2} = \nu(e_{k-1}) \in F, \quad ..., e_1 = \nu(e_2) \in F.$$

D'où : $\mathrm{Ker}\,(\nu^k) = \mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_k) \subset F$.

• Puisque $e_{k+1} \notin F$ et que $e_{k+1} \in \mathrm{Ker}\,(\nu^{k+1})$, on a : $\mathrm{Ker}\,(\nu^{k+1}) \not\subset F$.

De plus : $\mathrm{Ker}\,(\nu^k) \subset \mathrm{Ker}\,(\nu^{k+1})$. D'où :

$$\mathrm{Ker}\,(\nu^k) \subset \mathrm{Ker}\,(\nu^{k+1}) \cap F \subsetneqq \mathrm{Ker}\,(\nu^{k+1}).$$

Comme $\mathrm{Ker}\,(\nu^k) = \mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_k)$ et $\mathrm{Ker}\,(\nu^{k+1}) = \mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_{k+1})$, il en résulte :

$$\mathrm{Ker}\,(\nu^k) = \mathrm{Ker}\,(\nu^{k+1}) \cap F.$$

Puis :

$$\mathrm{Ker}\,(h^k) = \mathrm{Ker}\,(\nu^k) \cap F = \mathrm{Ker}\,(\nu^{k+1}) \cap F = \mathrm{Ker}\,(h^{k+1}].$$

Il s'ensuit classiquement que la suite $\big(\mathrm{Ker}\,(h^p)\big)_{p \geqslant k}$ est constante égale à $\mathrm{Ker}\,(h^k)$. Mais, comme $h$ est nilpotent, pour $p$ assez grand, $\mathrm{Ker}\,(h^p) = F$. D'où : $\mathrm{Ker}\,(h^k) = F$, puis :

$$F = \mathrm{Ker}\,(h^k) = \mathrm{Ker}\,(\nu^k) \cap F \subset \mathrm{Ker}\,(\nu^k) \subset F.$$

Finalement :

$$F = \mathrm{Ker}\,(\nu^k) = \mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_k) = F_k.$$

**I.5.c.** On conclut :

$$\boxed{\text{Les sev de } K^n \text{ stables par } \nu \text{ sont } F_0, ..., F_n}$$

**I.6.a.** Notons $\varphi$ l'endomorphisme de $K^n$ représenté par $P$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$.

- On a : $\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \varphi(e_i) = e_{n+1-i}$. D'où :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \varphi \circ \varphi(e_i) = \varphi(e_{n+1-i}) = e_{n+1-(n+1-i)} = e_i,$$

et donc $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$, d'où : $P^2 = \mathrm{I}_n$.

- Notons $\theta$ l'endomorphisme de $K^n$ représenté par ${}^{\mathrm{t}}J$ dans $\mathcal{B}$. On a donc :

$$\theta(e_1) = e_2, \ldots, \theta(e_{n-1}) = e_n, \quad \theta(e_n) = 0.$$

D'où :

$$\varphi \circ \nu(e_1) = \varphi(0) = 0 \quad \text{ et } \quad \theta \circ \varphi(e_1) = \theta(e_n) = 0,$$

et, pour tout $i \in \{2, ..., n\}$ :

$$\varphi \circ \nu(e_i) = \varphi(e_{i-1}) = e_{n+1-(i-1)} = e_{n+2-i}, \text{ et } \theta \circ \varphi(e_i) = \theta(e_{n+1-i}) = e_{(n+1-i)+1} = e_{n+2-i}.$$

On a donc : $\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \varphi \circ \nu(e_i) = \theta \circ \varphi(e_i)$,
d'où, puisqu'il s'agit d'endomorphismes : $\varphi \circ \nu = \theta \circ \varphi$, et donc : $PJ = {}^{\mathrm{t}}JP$.

**I.6.b.** D'après a., $P^2 = \mathrm{I}_n$, donc $P$ est inversible et $P^{-1} = P$, et on a ${}^{\mathrm{t}}J = PJP^{-1}$.
On conclut :

$$\boxed{{}^{\mathrm{t}}J \sim J}$$

**I.7.a.** • La matrice $Q$ est diagonale et à termes diagonaux tous non nuls, donc, d'après le Cours, $Q$ est inversible, c'est-à-dire $Q \in \mathbf{GL}_n(K)$.

- Notons $\psi$ l'endomorphisme de $K^n$ représenté par $L$ dans $\mathcal{B}$. On a donc :

$$\psi(e_1) = 0, \quad \psi(e_2) = a_1 e_1, \quad \ldots, \ \psi(e_n) = a_{n-1} e_{n-1}.$$

Notons $u$ l'endomorphisme de $K^n$ représenté par $Q$ dans $\mathcal{B}$. On a donc :

$$u(e_1) = a_1 \cdots a_{n-1} e_1, \quad u(e_2) = a_2 \cdots a_{n-1} e_2, \quad \ldots, \quad u(e_{n-1}) = a_{n-1} e_{n-1}, \quad u(e_n) = e_n.$$

D'où :

$$u \circ \nu(e_1) = u\big(\nu(e_1)\big) = u(0) = 0 \quad \text{ et } \quad \psi \circ u(e_1) = \psi(a_1 \cdots a_{n-1} e_1) = a_1 \cdots a_{n-1} \psi(e_1) = 0$$

et, pour tout $i \in \{2, ..., n\}$ :

$$u \circ \nu(e_i) = u(e_{i-1}) = a_{i-1} \cdots a_{n-1} e_{i-1}$$
$$\text{et} \quad \psi \circ u(e_i) = \psi(a_i \cdots a_{n-1} e_i) = a_i \cdots a_{n-1} \psi(e_i) = a_i \cdots a_{n-1} a_{i-1} e_{i-1} = a_{i-1} \cdots a_{n-1} e_{i-1}.$$

On a donc :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad u \circ \nu(e_i) = \psi \circ u(e_i),$$

d'où, puisqu'il s'agit d'endomorphismes : $u \circ \nu = \psi \circ u$, et donc : $QJ = LQ$.

**I.7.b.** Puisque $QJ = LQ$ et que $Q$ est inversible, on a $L = QJQ^{-1}$. On conclut :

$$\boxed{L \sim J}$$

**I.7.c.** *1)* D'après 7.b., avec $n = 3,\ a_1 = 2 \neq 0,\ a_2 = 3 \neq 0$, les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

**I.7.c.** *2)* Les rangs des matrices envisagées sont respectivement égaux à 2 et 1, donc différents, donc les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

**I.8.a.** On peut supposer $N \geqslant n-1$, quitte à rajouter des termes nuls dans $P$. On a alors :

$$P(J) = \sum_{k=0}^{N} a_k J^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_0 & \ddots & a_2 \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & a_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \end{pmatrix}.$$

**I.8.b.** On a :

$$\mathrm{e}^J = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} J^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} J^k = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!} \\ \vdots & (0) & \ddots & 1 & \frac{1}{1!} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## PARTIE II A

**II.A.1.** On a :

$$J_1 = (0), \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

d'où :

$$J = \operatorname{diag}(\underbrace{J_N, \ldots, J_N}_{\gamma_N}, \underbrace{J_{N-1}, \ldots, J_{N-1}}_{\gamma_{N-1}}, \underbrace{J_{N-2}, \ldots, J_{N-2}}_{\gamma_{N-2}}, \ldots, \underbrace{J_2, \ldots J_2}_{\gamma_2}, \underbrace{J_1 \ldots J_1}_{\gamma_1}),$$

$$J^2 = \operatorname{diag}(\underbrace{J_{N-1}, \ldots, J_{N-1}}_{\gamma_N}, \underbrace{J_{N-2}, \ldots, J_{N-2}}_{\gamma_{N-1}}, \underbrace{J_{N-3}, \ldots, J_{N-3}}_{\gamma_{N-2}}, \ldots, \underbrace{J_1, \ldots, J_1}_{\gamma_2}, \underbrace{0, \ldots 0}_{\gamma_1}),$$

$$J^3 = \operatorname{diag}(\underbrace{J_{N-2}, \ldots, J_{N-2}}_{\gamma_N}, \underbrace{J_{N-3}, \ldots, J_{N-3}}_{\gamma_{N-1}}, \underbrace{J_{N-4}, \ldots, J_{N-4}}_{\gamma_{N-2}}, \ldots, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\gamma_2}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\gamma_1}),$$

$$\vdots$$

$$J^k = \operatorname{diag}(\underbrace{J_{N-k+1}, \ldots, J_{N-k+1}}_{\gamma_N}, \underbrace{J_{N-k}, \ldots, J_{N-k}}_{\gamma_{N-1}}, \underbrace{J_{N-k-1}, \ldots, J_{N-k-1}}_{\gamma_{N-2}}, \ldots, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\gamma_2} \underbrace{0, \ldots, 0}_{\gamma_1}),$$

$$\vdots$$

$$J^{N-1} = \operatorname{diag}(\underbrace{J_2, \ldots J_2}_{\gamma_N}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\gamma_{N-1}}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\gamma_{N-2}}, \ldots, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\gamma_2}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\gamma_1}),$$

$$J^N = 0.$$

**II.A.2.** On a :

$$\operatorname{rg}(J_1) = 0, \quad \operatorname{rg}(J_2) = 1, \quad \ldots, \quad \operatorname{rg}(J^k) = k-1, \quad \ldots, \quad \operatorname{rg}(J_N) = N-1.$$

Il est connu que le rang d'une matrice diagonale par blocs est égal à la somme des rangs des blocs diagonaux, donc, pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$ :

$$\operatorname{rg}(\nu^k) = \operatorname{rg}(J^k) = \gamma_N \operatorname{rg}(J_{N-k+1}) + \gamma_{N-1} \operatorname{rg}(J_{N-k}) + \cdots + \gamma_{k+2} \operatorname{rg}(J_3) + \gamma_{k+1} \operatorname{rg}(J_2) = \sum_{i=k+1}^{N} (i-k)\gamma_i.$$

## PARTIE II B

**II.B.1.** • Il est clair que : $O^1 = 0$, $J^3 = 0$, $A^2 = 0$, $B^2 = 0$, donc $O$, $J$, $A$, $B$ sont nilpotentes.

• Notons $a$ (resp. $(b)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par $A$ (resp. $B$) dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$. On a alors :

$$a(e_1) = 0, \quad a(e_2) = e_1, \quad a(e_3) = 0, \qquad b(e_1) = 0, \quad b(e_2) = 0, \quad b(e_3) = e_2.$$

Notons $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\varphi(e_1) = e_2, \qquad \varphi(e_2) = e_3, \qquad \varphi(e_3) = e_1.$$

Il est clair que $\varphi$ est bijectif et on a :

$$\varphi \circ a(e_1) = \varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad b \circ \varphi(e_1) = b(e_2) = 0,$$

$$\varphi \circ a(e_2) = \varphi(e_1) = e_2 \quad \text{et} \quad b \circ \varphi(e_2) = b(e_3) = e_2,$$

$$\varphi \circ a(e_3) = \varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad b \circ \varphi(e_3) = b(e_1) = 0,$$

donc : $\varphi \circ a = b \circ \varphi$, $b = \varphi \circ a \circ \varphi^{-1}$, donc $A \sim B$.

• Comme $\mathrm{rg}\,(O) = 0$, $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(B) = 1$, $\mathrm{rg}\,(J) = 2$, les matrices $O$, $J$, $A$ sont deux à deux non semblables.

**II.B.2.** On applique le résultat admis en II.A. pour exprimer un représentant de chaque classe de similitude des matrices nilpotentes de $\mathbf{M}_6(\mathbb{R})$.

Il s'agit des matrices diagonales par blocs suivantes :

$$(J_6), \quad (J_5, J_1), \quad (J_4, J_2), \quad (J_4, J_1, J_1), \quad (J_3, J_3), \quad (J_3, J_2, J_1), \quad (J_3, J_1, J_1, J_1),$$

$$(J_2, J_2, J_2), \quad (J_2, J_2, J_1, J_1), \quad (J_2, J_1, J_1, J_1, J_1), \quad (J_1, J_1, J_1, J_1, J_1, J_1) = 0.$$

La réponse est donc : $\boxed{\text{onze}}$.

**II.B.3.a.** On calcule $A^2, A^3, A^4$ :

$$\begin{array}{cccc}
 & \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A} & \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A} & \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A} \\
\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A^2} & \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A^3} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A^4}
\end{array}$$

d'où :

$$\boxed{A^4 = 0}$$

**II.B.3.b.** • On a :

$$u_4 = e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = f(e_4) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u_2 = f^2(e_4) = f(e_3) = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_1 = f^3(e_4) = f(e_2) = e_1 + e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où la matrice de la famille $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ dans $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque cette matrice carrée est triangulaire (inférieure) et à termes diagonaux tous non nuls, elle est inversible, donc $\mathcal{U}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{U}$ est la matrice de la famille $\mathcal{U}$ dans la base $\mathcal{B}$, vue ci-dessus : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• On calcule $P^{-1}$ :

$$e_4 = u_4, \quad e_3 = u_3, \quad e_2 = u_2, \quad e_1 = u_1 - e_4 = u_1 - u_4,$$

d'où : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Puisque $f$ est représenté par $A$ dans $\mathcal{B}$, que $f$ est représenté par $J$ dans $\mathcal{U}$ et que $P$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{U}$, on a : $A = PJP^{-1}$.

On peut d'ailleurs contrôler ce résultat en effectuant les produits matriciels :

$$\begin{array}{ccc}
 & \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{J} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{P^{-1}} \\
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{PJ} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{PJP^{-1}=A}
\end{array}$$

**II.B.4.a.** Le calcul de $B^2$ est immédiat :

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B^2} \end{array}$$

On conclut : $\boxed{B^2 = 0}$

**II.B.4.b.** • On a :

$$v_1 = g(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = g(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule le déterminant de la matrice de la famille $\mathcal{V}$ relativement à la base $\mathcal{B}$, en développant, par exemple, par rapport à la 4è ligne :

$$\det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{V})\big) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

donc $\mathcal{V}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{V}$ est la matrice carrée de la famille $\mathcal{V}$ par rapport à la famille $\mathcal{U}$ :

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

• On calcule $Q^{-1}$ :

$$\begin{cases} u_1 = -e_1 - e_3 \\ u_2 = e_1 \\ u_3 = e_1 - e_2 + 2e_3 - e_4 \\ u_4 = e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = u_2 \\ e_2 = u_4 \\ e_3 = -u_1 - e_1 = -u_1 - u_2 \\ e_4 = u_2 - u_4 + 2(-u_1 - u_2) - u_3 = -2u_1 - u_2 - u_3 - u_4. \end{cases}$$

D'où :

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On peut d'ailleurs contrôler $QQ^{-1} = \mathrm{I}_4$.

On calcule les $g(v_i)$ :

$$g(v_1) = g\big(g(e_1)\big) = g^2(e_1) = 0, \qquad g(v_2) = g(e_1) = v_1,$$

$$g(v_3) = g\big(g(e_2)\big) = g^2(e_2) = 0, \qquad g(v_4) = g(e_2) = v_3.$$

On en déduit que la matrice de $g$ dans la base $\mathcal{V}$ est la matrice $K$ de l'énoncé.

Comme $g$ est représenté par $B$ dans $\mathcal{B}$, que $g$ est représenté par $K$ dans $\mathcal{V}$ et que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{V}$ est $Q$, on a : $B = QKQ^{-1}$, ce qu'on peut d'ailleurs contrôler en effectuant les produits matriciels.

## PARTIE III

**III.1.a.** Soit $x \in C_i = \operatorname{Ker}\big((f-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\mu_i}\big)$. On a :

$$(f-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\mu_i}\big(f(x)\big) = \big((f-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\mu_i} \circ f\big)(x) = \big(f \circ (f-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\mu_i}\big)(x) = f(0) = 0,$$

donc $f(x) \in C_i$.

Ceci montre que $C_i$ est stable par $f$.

On peut donc considérer l'endomorphisme $f_i$ de $C_i$ induit par $f$ sur $C_i$.

On note $\nu_i = f_i - \mathrm{Id}_{C_i}$, qui est aussi l'endomorphisme de $C_i$ induit par $f-\lambda_i \mathrm{Id}_E$.

**III.1.b.** • On a, pour tout $x \in C_i$ :

$$\nu_i^{\mu_i}(x) = (f_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{C_i})^{\mu_i}(x) = (f-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\mu_i}(x) = 0,$$

donc $\nu_i^{\mu_i} = 0$, $\nu_i$ est nilpotent et son indice de nilpotence est $\geqslant \mu_i$.

• Puisque $\mu_i$ est l'ordre de multiplicité de $\lambda_i$ dans $\pi_f$, il existe $Q \in K[\mathrm{X}]$ tel que :

$$\pi_f = (\mathrm{X}-\lambda_i)^{\mu_i} Q \qquad \text{et} \qquad Q(\lambda_i) \neq 0.$$

Par définition de $\pi_f$, comme $(\mathrm{X}-\lambda_i)^{\mu_i - 1}Q$ divise $\pi_f$ et est de degré strictement inférieur au degré de $\pi_f$, $(\mathrm{X}-\lambda_i)^{\mu_i-1}Q$ n'est pas annulateur de $f$. On a donc : $(f-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\mu_i-1} \circ Q(f) \neq 0$. Il existe donc $x \in E$ tel que : $(f-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\mu_i-1} \circ Q(f)(x) \neq 0$. En notant $y = Q(f)(x) \in E$, on a donc $(f-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\mu_i-1}(y) \neq 0$.

D'autre part :

$$0 = \big(\pi_f(f)\big)(x) = (f-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\mu_i} \circ Q(f)(x) = (f-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\mu_i}(y),$$

donc $y \in C_i$.

Ainsi, $y \in C_i$ et :

$$\nu_i^{\mu_i-1}(y) = (f_i - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\mu_i-1}(y) \neq 0.$$

Ceci montre : $\nu_i^{\mu_i-1} \neq 0$.

On conclut que $\nu_i$ est nilpotent et que son indice de nilpotence est $\mu_i$.

**III.1.c.** D'après II.A. (résultat admis), il existe une base $\mathcal{U}_i$ de $C_i$ dans laquelle $\nu_i$ est représenté par une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$\operatorname{diag}(J_{\mu_i}, \ldots, J_{\mu_i}, \ldots, J_1, \ldots, J_1).$$

**III.1.d.** Comme $f_i = \nu_i + \lambda_i \mathrm{Id}_{C_i}$, la matrice de $f_i$ dans la base $\mathcal{U}_i$ est obtenue en rajoutant $\lambda_i \mathrm{I}$ à la matrice de $\nu_i$ dans $\mathcal{U}_i$ et est donc de la forme :

$$\operatorname{diag}\big(J_{\mu_i}(\lambda_i), \ldots, J_{\mu_i}(\lambda_i), \ldots, J_1(\lambda_i), \ldots, J_1(\lambda_i)\big).$$

**III.2.** Puisque $\pi_f$ est supposé scindé sur $K$ et que $\pi_f$ est unitaire, on a :

$$\pi_f = \prod_{i=1}^{p} (\mathrm{X}-\lambda_i)^{\mu_i}.$$

Comme les polynômes $(\mathrm{X}-\lambda_i)^{\mu_i}$, $i \in \{1,...,p\}$, sont premiers entre eux deux à deux, on a, d'après le théorème des noyaux :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}\big((f-\lambda_i)^{\mu_i}\big) = \bigoplus_{i=1}^{p} C_i.$$

**III.3.** Comme, pour tout $i \in \{1, ..., p\}$, $\mathcal{U}_i$ est une base de $C_i$ et que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} C_i$, d'après le Cours, la famille $\mathcal{U}$, obtenue en réunissant les familles $\mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_p$ dans l'ordre, est une base de $E$.
La matrice de $f$ dans $\mathcal{U}$ est de la forme :

$$\operatorname{diag}\big(J_{\mu_1}(\lambda_1), \dots, J_{\mu_1}(\lambda_1), \dots, J_1(\lambda_1), \dots, J_1(\lambda_1), \dots, J_{\mu_p}(\lambda_p), \dots, J_{\mu_p}(\lambda_p), \dots, J_1(\lambda_p), \dots, J_1(\lambda_p)\big).$$

**III.4.** • Supposons $A$ et $B$ semblables et, par exemple, $\chi_A$ scindé sur $K$.
Notons $f$ l'endomorphisme de $E$ représenté par $A$ dans une base $\mathcal{B}_1$. Comme $B \sim A$, $B$ représente $f$ dans une base $\mathcal{B}_2$. Puisque $\chi_A$ est scindé sur $K$, $\chi_f = \chi_A$ est scindé sur $K$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\pi_f \mid \chi_f$, donc $\pi_f$ est scindé sur $K$. D'après le résultat admis en 3., $f$ admet une réduite de Jordan et une seule, à l'ordre près des blocs de Jordan. Donc, $A$ et $B$, qui représentent le même endomorphisme $f$, ont la même réduite de Jordan, à l'ordre près des blocs de Jordan.

• Réciproquement, si $A$ et $B$ ont la même réduite de Jordan $J$, à l'ordre près des blocs, alors $A \sim J$ et $B \sim J$, donc $A \sim B$.

**III.5.** • On forme le polynôme caractéristique $\chi_A$ de $A$ :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-\lambda & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_1 \longleftarrow L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}{=} \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1-\lambda & -1-\lambda & -1-\lambda & -1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-\lambda & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-\lambda & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_j \longleftarrow C_j - C_1,\ j=2,3,4,5}{=} (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{développement par rapport à } L_1}{=} (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)^2(1-\lambda)^3 = -(\lambda-1)^3(\lambda+1)^2.$$

Ainsi, les valeurs propres de $A$ sont : 1 d'ordre 3, $-1$ d'ordre 2.

• Notons $M = A - \mathrm{I}_5 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. On calcule $M^2$ et $M^3$ :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}}^{M} \quad \overbrace{\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}}^{M}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}}_{M} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -8 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}}_{M^2} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ -12 & -12 & -12 & -12 & -12 \end{pmatrix}}_{M^3}$$

On choisit un vecteur $V_3$ tel que $M^3V_3 = 0$ et $M^2V_3 \neq 0$, par exemple $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

puis on définit $V_2 = AV_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_1 = A^2V_3 = AV_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Notons $N = A + \mathrm{I}_5 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. On a : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 & -9 & -9 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On choisit un vecteur $V_5$ tel que $N^2V_5 = 0$ et $NV_5 \neq 0$, par exemple $V_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, puis on définit

$V_4 = AV_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. En notant $P = (\, V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4 \quad V_5 \,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

et $J = \begin{pmatrix} J_3(1) & (0) \\ (0) & J_2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a donc : $A = PJP^{-1}$, ce qui constitue la réduction de Jordan de $A$.

## PARTIE IV

**IV.1.** Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

Puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, le polynôme minimal de $A$ est scindé sur $\mathbb{C}$, donc, d'après III.A., $A$ admet une réduite de Jordan $J$. Il existe donc $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que : $A = PJP^{-1}$.

La matrice $J$ est diagonale par blocs du type $J_\mu(\lambda)$, $\mu \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, et $J_\mu(\lambda) = \lambda \mathrm{I} + J_\mu$.

D'après I.6.b., ${}^{\mathrm{t}}J_\mu \sim J_\mu$. Il existe donc $Q$ inversible telle que : ${}^{\mathrm{t}}J_\mu = QJ_\mu Q^{-1}$. On a alors :

$${}^{\mathrm{t}}\big(J_\mu(\lambda)\big) = {}^{\mathrm{t}}(\lambda\mathrm{I} + J_\mu) = \lambda\mathrm{I} + {}^{\mathrm{t}}J_\mu = \lambda\mathrm{I} + QJ_\mu Q^{-1} = Q(\lambda\mathrm{I} + J_\mu)Q^{-1} = QJ_\mu(\lambda)Q^{-1},$$

donc ${}^{\mathrm{t}}\big(J_\mu(\lambda)\big) \sim J_\mu(\lambda)$.

Ensuite, il est clair, en envisageant des produits et des inverses de matrices diagonales par blocs inversibles, que ${}^{\mathrm{t}}J \sim J$.

Enfin, comme $A = PJP^{-1}$, on a : ${}^{\mathrm{t}}A = {}^{\mathrm{t}}P^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}J\,{}^{\mathrm{t}}P$ et ${}^{\mathrm{t}}P$ est inversible.

Ainsi, ${}^{\mathrm{t}}A$ est semblable à ${}^{\mathrm{t}}J$, ${}^{\mathrm{t}}J$ est semblable à $J$, et $J$ est semblable à $A$, donc ${}^{\mathrm{t}}A$ est semblable à $A$.

**IV.2.a.** Puisque $A \sim J_A$ et $B \sim J_B$, par produits de matrices diagonales par blocs et inverses de matrices diagonales par blocs inversibles, on a : $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} J_A & 0 \\ 0 & J_B \end{pmatrix}$.

De plus, il est clair que la matrice $\begin{pmatrix} J_A & 0 \\ 0 & J_B \end{pmatrix}$ est une réduite de Jordan.

On conclut que la réduite de Jordan de $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} J_A & 0 \\ 0 & J_B \end{pmatrix}$.

**IV.2.b.** • Puisque $A \sim A'$ et que $\chi_A$ est scindé sur $K$, $\chi_{A'} = \chi_A$ est scindé sur $K$.

On a :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \implies \chi_{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}} = \chi_{\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}}$$
$$\iff \chi_A\chi_B = \chi_{A'}\chi_C \iff \chi_A\chi_B = \chi_A\chi_C \implies \chi_B = \chi_C,$$

car $\chi_A$ n'est pas le polynôme nul et $K[\mathrm{X}]$ est intègre.

Comme $\chi_B$ est scindé sur $K$, $\chi_C = \chi_B$ est scindé sur $K$.

• D'après 2.a., la réduite de Jordan de $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} J_A & 0 \\ 0 & J_B \end{pmatrix}$ et la réduite de Jordan de $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} J_{A'} & 0 \\ 0 & J_C \end{pmatrix}$.

Comme $A \sim A'$, à l'ordre près des blocs de Jordan, on peut supposer $J_A = J_{A'}$.

Comme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, par unicité de la réduite de Jordan à l'ordre près des blocs de Jordan, on a alors $J_B = J_C$, donc $B \sim C$.

**IV.3.a.** Puisque $\mathrm{I}_n$ et $J$ commutent, on a, par la formule du binôme de Newton :

$$\big(J_n(\lambda)\big)^k = (\lambda \mathrm{I}_n + J_n)^k = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_k^i \lambda^{k-i} J_n^i = \begin{pmatrix} \lambda^k & \mathrm{C}_k^1 \lambda^{k-1} & \dots & \dots & \mathrm{C}_k^n \lambda^{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

**IV.3.b.** • Si $\big(J_n(\lambda)\big)^k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0,$ alors, en particulier, le terme de la première ligne et première colonne tend vers 0, donc $\lambda^k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où, d'après le Cours sur la suite géométrique : $|\lambda| < 1$.

• Réciproquement, supposons $|\lambda| < 1$. Par prépondérance des exponentielles en $k$ sur les puissances de $k$, chacun des termes de $\big(J_n(\lambda)\big)^k$ tend vers 0 lorsque $k$ tend vers l'infini, donc $\big(J_n(\lambda)\big)^k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0$.

On conclut :

$$\boxed{\text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{C} : \ \big(J_n(\lambda)\big)^k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0 \iff |\lambda| < 1}$$

**IV.3.c.** Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

D'après le théorème de d'Alembert, $\pi_A$ est scindé sur $\mathbb{C}$, donc, d'après III.3., $A$ admet une réduite de Jordan $J$. Il existe donc $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que : $A = PJP^{-1}$.

On a alors :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A^k = PJ^kP^{-1},$$

d'où, par continuité des opérations dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ :

$$A^k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0 \iff J^k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'autre part, $J$ est de la forme :

$$J = \operatorname{diag}\big(J_{\mu_1}(\lambda_1), ..., J_1(\lambda_p)\big),$$

donc, par produits de matrices diagonales par blocs, pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$J^k = \operatorname{diag}\big(J_{\mu_1}(\lambda_1)^k, ..., J_1(\lambda_p)^k\big).$$

On déduit :

$$J^k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \forall\, i \in \{1, ..., p\},\ \forall\, q \in \{1, ..., \mu_i\},\ \ \big(J_q(\lambda_i)\big)^k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\iff \forall\, i \in \{1, ..., p\}, \ \ |\lambda_i| < 1 \iff \rho(A) < 1.$$

On conclut :

$$\boxed{A^k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \rho(A) < 1}$$

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *