Préparation à l'agrégation interne de Mathématiques 2007-2008

Jean-Marie Monier

Corrigé de l'épreuve d'entraînement du 1er décembre 2007

$\boxed{\textbf{Q1}}$ **a.** L'application f est continue par morceaux sur le segment $[-\pi\,;\pi]$, donc bornée sur $[-\pi\,;\pi]$, puis f est 2π-périodique, donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.

b. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\int_b^{b+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{a+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

et, par le changement de variable $u = t - 2\pi$:

$$\int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u+2\pi)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u,$$

puisque f est 2π-périodique.

On a donc :

$$\int_b^{b+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_b^a f + \int_a^{a+2\pi} f + \int_a^b f = \int_a^{a+2\pi} f.$$

On conclut que, pour $f \in \mathcal{D}$ fixée, $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f$ ne dépend pas de $a \in \mathbb{R}$.

c. Un sens est évident.

Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge, alors $\displaystyle\int_n^{n+2\pi} |f| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, d'après b., $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f| = 0$, puis, comme f est continue par morceaux sur $[-\pi\,;\pi]$, f est nulle sauf peut-être en un nombre fini de points $a_1, ..., a_N$ de $[-\pi\,;\pi]$. Mais, comme $f(a_k) = \dfrac{1}{2}\big(f(a_k^+) + f(a_k^-)\big) = 0$, on déduit que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

d. Supposons $f \in \mathcal{C}$.

Comme f est continue sur le segment $[-2\pi\,;2\pi]$, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[-2\pi\,;2\pi]$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $\eta > 0$ tel que $\eta < \pi$ et :

$$\forall\, t', t'' \in [-2\pi\,;2\pi],\quad \big(|t'-t''| \leqslant \eta \implies \big|f(t') - f(t'')\big| \leqslant \varepsilon\big).$$

Soit $(t', t'') \in \mathbb{R}^2$ tel que $|t'-t''| \leqslant \eta$. On a alors $|t'-t''| < \pi$. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que : $t' - 2n\pi \in [-\pi\,;\pi]$. On a alors :

$$\begin{cases} t' - 2n\pi \in [-\pi\,;\pi] \subset [-2\pi\,;2\pi] \\ t'' - 2n\pi \in [-2\pi\,;2\pi],\ \text{car } |t''-2n\pi| \leqslant |t''-t'| + |t'-2n\pi| \leqslant 2\pi \\ \big|(t'-2n\pi) - (t''-2n\pi)\big| = |t'-t''| \leqslant \eta, \end{cases}$$

donc $\big|f(t') - f(t'')\big| = \big|f(t'-2n\pi) - f(t''-2n\pi)\big| \leqslant \varepsilon$.

Finalement, f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ **a.** D'abord : $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad e_n \in \mathcal{C} \subset \mathcal{D}$.

On a, pour tout $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$:

$$(e_n \,|\, e_p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{e_n(t)}\, e_p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-n)t}\,\mathrm{d}t,$$

donc :

si $n \neq p$, alors $(e_n \,|\, e_p) = \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-n)t}}{\mathrm{i}(p-n)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$

si $n = p$, alors $(e_n \,|\, e_p) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t = 1.$

b. Soient $f \in \mathcal{D}$, $n \in \mathbb{Z}$. Il est clair que $\overline{f} \in \mathcal{D}$ et $f^{\vee} \in \mathcal{D}$. On a :

$$c_n(\overline{f}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t} = \overline{c_{-n}(f)}$$

$$c_n(f^{\vee}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\vee}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t \underset{u=-t}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nu}\,\mathrm{d}u = c_{-n}(f).$$

$\boxed{\textbf{Q3}}$ **a.** On remarque : $\forall\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2, \quad |\overline{\alpha}\,\beta| \leqslant \dfrac{1}{2}\big(|\alpha|^2 + |\beta|^2\big),$

provenant de : $\forall\,(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2+b^2),$

lui-même de : $\dfrac{1}{2}(a^2+b^2) - ab = \dfrac{1}{2}(a-b)^2 \geqslant 0.$

Comme les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}|\alpha_{-n}|^2$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}|\alpha_n|^2$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}|\beta_{-n}|^2$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}|\beta_n|^2$ convergent, il en résulte, par le théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}|\overline{\alpha_{-n}}\,\beta_n|$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}|\overline{\alpha_n}\,\beta_n|$ convergent, et donc la suite $(\overline{\alpha_n}\,\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

b. • On a $\ell^2 \subset \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ et $\ell^2 \neq \varnothing$ car $0 \in \ell^2$.

• Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et toute $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$, $\lambda\alpha = (\lambda\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dans ℓ^2 car $|\lambda\alpha_n|^2 = |\lambda|^2\,|\alpha_n|^2$, donc la suite $(|\lambda\alpha_n|^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

• Soient $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\beta = (\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux éléments de ℓ^2.
Comme : $\forall\,n \in \mathbb{Z}, \quad |\alpha_n + \beta_n|^2 = |\alpha_n|^2 + \overline{\alpha_n}\,\beta_n + \alpha_n\overline{\beta_n} + |\beta_n|^2 \leqslant |\alpha_n|^2 + 2|\overline{\alpha_n}\,\beta_n| + |\beta_n|^2$
et que les séries de termes généraux $|\alpha_n|^2$, $|\overline{\alpha_n}\,\beta_n|$, $|\beta_n|^2$, $|\alpha_{-n}|^2$, $|\overline{\alpha_{-n}}\,\beta_{-n}|$, $|\beta_{-n}|^2$ convergent, les séries de termes généraux $|\alpha_n + \beta_n|^2$ et $|\alpha_{-n} + \beta_{-n}|^2$ convergent, donc $\alpha + \beta \in \ell^2$.
Ceci montre que ℓ^2 est un $\mathbb{C}$-sev de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, donc ℓ^2 est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

• D'après a., pour tout $(\alpha,\beta) \in \ell^2$, la suite $(\overline{\alpha_n}\,\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, donc l'application

$(\alpha,\beta) \longmapsto \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{\alpha_n}\,\beta_n$ est correctement définie.

La symétrie hermitienne et la linéarité par rapport à la seconde place sont immédiates.

De plus, $<\alpha\,,\,\alpha> = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \geqslant 0$ et, si $<\alpha\,,\,\alpha> = 0$, alors, $\forall\,n \in \mathbb{Z}, \ \alpha_n = 0$, donc $\alpha = 0$.

Ainsi, l'application $(\alpha,\beta) \longmapsto \ <\alpha\,,\,\alpha> = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{\alpha_n}\,\beta_n$ est un produit scalaire sur ℓ^2.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ Il est clair que φ est continue par morceaux, 2π-périodique, et $\varphi(0) = 0 = \dfrac{1}{2}\big(\varphi(0^+) + \varphi(0^-)\big)$, donc $\varphi \in \mathcal{D}$.

Puisque φ est impaire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(\varphi) = 0$.

Et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n(\varphi) = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt \, \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - t}{2} \sin nt \, \mathrm{d}t$$

$$\underset{\text{ipp}}{=} \frac{1}{\pi}\left(\left[(\pi - t)\Big(-\frac{\cos nt}{n}\Big)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{n} \, \mathrm{d}t\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{\pi n^2}\big[\sin nt\big]_0^{\pi} = \frac{1}{n}.$$

Puisque $\varphi \in \mathcal{D}$, et que φ est clairement de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de φ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme φ.

En particulier, pour tout $t \in]0\,;\pi]$: $\dfrac{\pi - t}{2} = \varphi(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin nt$. On conclut :

$$\forall\, t \in]0\,;\pi], \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi - t}{2}.$$

$\boxed{\textbf{Q5}}$ **a.** Soit $f \in \mathcal{D}$. D'après le théorème de Parseval, la suite $\big(c_n(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est de carré sommable, c'est-à-dire que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |c_{-n}(f)|^2$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |c_n(f)|^2$ convergent, donc $|c_{-n}(f)| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ et $|c_n(f)| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, ou encore : $c_n(f) \underset{|n| \longrightarrow +\infty}{=} o(1)$.

b. • La linéarité de Γ est immédiate, car, avec des notations évidentes :

$$c_n(\lambda f+g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(\lambda f(t)+g(t)\big)\, \mathrm{e}^{-int} \, \mathrm{d}t = \lambda \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int} \, \mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\mathrm{e}^{-int} \, \mathrm{d}t = \lambda c_n(f) + c_n(g),$$

donc : $\Gamma(\lambda f + g) = \lambda \Gamma(f) + \Gamma(g)$.

• D'après le théorème de Parseval, pour toute $f \in \mathcal{D}$, la suite $\Big(\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\big(\mathcal{D}, (.\,|\,.)\big)$ vers f.

Soient $f, g \in \mathcal{D}$. On a alors : $\quad \Big(\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k \,\Big|\, \sum_{k=-n}^{n} c_k(g) e_k\Big) \underset{n\infty}{\longrightarrow} (f\,|\,g)$.

Mais, puisque $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale :

$$\Big(\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k \,\Big|\, \sum_{k=-n}^{n} c_k(g) e_k\Big) = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k(f)}\, c_k(g),$$

et, comme $\big(\overline{c_k(f)}\, c_k(g)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable : $\quad \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k(f)}\, c_k(g) \underset{n\infty}{\longrightarrow} < \Gamma(f)\,,\, \Gamma(g) >$.

On déduit : $\qquad < \Gamma(f)\,,\, \Gamma(g) > = (f\,|\,g)$.

• Soit $f \in \mathcal{D}$ telle que $\Gamma(f) = 0$. On a alors : $||f||_2^2 = (f\,|\,f) = < \Gamma(f)\,,\, \Gamma(g) > = 0$, donc $f = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\,(\Gamma) = \{0\})$, et donc Γ est injective.

Q6 **a.** • Soient $f, g \in \mathcal{D}$, $t \in \mathbb{R}$. L'application $u \longmapsto f(u)g(t-u)$ est continue par morceaux sur $[-\pi\,;\pi]$, donc $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u$ existe. Ceci montre que $f * g$ est correctement définie et est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

• Soient $f, g \in \mathcal{D}$. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, puisque g est 2π-périodique :

$$(f*g)(t+2\pi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(t+2\pi-u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u = (f*g)(t),$$

donc $f*g$ est 2π-périodique.

b. Soient $f, g \in \mathcal{C}$.
L'application $F : \mathbb{R}\times[-\pi\,;\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $(t,u) \longmapsto F(t,u) = f(u)g(t-u)$ est continue sur $\mathbb{R}\times[-\pi\,;\pi]$ et intégrable en u sur le segment $[-\pi\,;\pi]$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus :

$$\forall\,(t,u) \in \mathbb{R}\times[-\pi\,;\pi], \quad |F(t,u)| = |f(u)|\,|g(t-u)| \leqslant ||f||_\infty\,||g||_\infty$$

et l'application constante $||f||_\infty ||g||_\infty$ est continue et intégrable sur le segment $[-\pi\,;\pi]$.
D'après le théorème du cours sur la continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, on conclut que $f*g$ est continue sur $\mathbb{R}$, et donc $f*g \in \mathcal{C}$.
Finalement : $\forall\, f, g \in \mathcal{D}, \quad f*g \in \mathcal{C}$.

Q7 *1)*

$$\begin{aligned}(f*g)(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u \underset{v=t-u}{=} -\frac{1}{2\pi}\int_{t+\pi}^{t-\pi} f(t-v)g(v)\,\mathrm{d}v\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(t-v)g(v)\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-v)g(v)\,\mathrm{d}v = (g*f)(t)\end{aligned}$$

2)

$$(f*e_n)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e_n(0-u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\mathrm{e}^{-inu}\,\mathrm{d}u = e_n(f)$$

3)

$$\begin{aligned}(f*e_n)(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e_n(t-u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\mathrm{e}^{int}\mathrm{e}^{-inu}\,\mathrm{d}u\\ &= \mathrm{e}^{int}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\mathrm{e}^{-inu}\,\mathrm{d}u = c_n(f)\mathrm{e}^{int},\end{aligned}$$

d'où : $f*e_n = c_n(f)e_n$.

4) D'après *3)* : $e_n * e_p = c_p(e_n)e_n = \delta_{n,p}e_n$.

5)

$$\begin{aligned}c_n(f*g) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f*g)(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u\Big)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\\ &\underset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} g(t-u)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\Big)f(u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Mais :

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t-u)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \underset{v=t-u}{=} -\int_{t+\pi}^{t-\pi} g(v)\mathrm{e}^{-in(u+v)}\,\mathrm{d}v = \Big(\int_{t-\pi}^{t+\pi} g(v)\mathrm{e}^{-inv}\,\mathrm{d}v\Big)\mathrm{e}^{-inu} = 2\pi c_n(g)\mathrm{e}^{-inu}.$$

d'où :

$$c_n(f*g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} c_n(g)\mathrm{e}^{-inu}f(u)\,\mathrm{d}u = c_n(f)c_n(g).$$

6)

$$\overline{f*g}(t)=\overline{(f*g)(t)}=\overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f}(u)\overline{g}(t-u)\,\mathrm{d}u=\overline{f}*\overline{g}(t).$$

7)

$$\begin{aligned}(f*g)^{\vee}(t)=(f*g)(-t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)g(-t-u)\,\mathrm{d}u &\underset{v=-u}{=}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(-v)g(-t+v)\,\mathrm{d}v\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\vee}(v)g^{\vee}(t-v)\,\mathrm{d}v=(f^{\vee}*g^{\vee})(t).\end{aligned}$$

8)

$$(f\,|\,g)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f}(t)g^{\vee}(0-t)\,\mathrm{d}t=(\overline{f}*g^{\vee})(0).$$

$\boxed{\textbf{Q8}}$ **a.** • D'abord, $\varphi*\varphi$ est paire. En effet : $(\varphi*\varphi)^{\vee}=\varphi^{\vee}*\varphi^{\vee}=(-\varphi)*(-\varphi)=\varphi*\varphi$.

On va donc calculer $\varphi*\varphi(t)$ pour $t\in[0\,;\pi]$.

•

$$\begin{aligned}\varphi*\varphi(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(u)\varphi(t-u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-u}{2}\varphi(t-u)\,\mathrm{d}u\\
&\underset{v=t-u}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{t-2\pi}^{t}\frac{\pi-t+v}{2}\varphi(v)\,\mathrm{d}v\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{t-2\pi}^{0}\frac{\pi-t+v}{2}\,\frac{-\pi-v}{2}\,\mathrm{d}v+\frac{1}{2\pi}\int_0^{t}\frac{\pi-t+v}{2}\,\frac{\pi-v}{2}\,\mathrm{d}v\\
&= \frac{1}{8\pi}\int_{t-2\pi}^{0}\big(-\pi(\pi-t)+(t-2\pi)v-v^2\big)\,\mathrm{d}v+\frac{1}{8\pi}\int_0^{t}\big((\pi-t)\pi+tv-v^2\big)\,\mathrm{d}v\\
&= \frac{1}{8\pi}\Big[-\pi(\pi-t)v+(t-2\pi)\frac{v^2}{2}-\frac{v^3}{3}\Big]_{t-2\pi}^{0}+\frac{1}{8\pi}\Big[\pi(\pi-t)(t-2\pi)+t\frac{v^2}{2}-\frac{v^3}{3}\Big]_0^{t}\\
&= \frac{1}{8\pi}\Big(\pi(\pi-t)(t-2\pi)-\frac{(t-2\pi)^3}{2}+\frac{(t-2\pi)^3}{3}+(\pi-t)\pi t+\frac{t^3}{2}-\frac{t^3}{3}\Big)\\
&= \frac{1}{8\pi}\Big(\pi(\pi-t)(2t-2\pi)-\frac{1}{6}(t-2\pi)^3+\frac{1}{6}t^3\Big) = -\frac{1}{24}(3t^2-6\pi t+2\pi^2).\end{aligned}$$

On conclut que $\varphi*\varphi$ est 2π-périodique et, pour tout $t\in[-\pi\,;\pi]$:

$$\boxed{\varphi(t)=\begin{cases}-\dfrac{1}{24}(3t^2-6\pi t+2\pi^2) & \text{si}\quad t\in[0\,;\pi]\\[2ex] -\dfrac{1}{24}(3t^2+6\pi t+2\pi^2) & \text{si}\quad t\in[-\pi\,;0]\end{cases}}$$

L'étude sur $[-\pi\,;\pi]$ est immédiate : on a $\varphi(0)=-\dfrac{\pi^2}{12}$, $\varphi(\pi)=\dfrac{\pi^2}{24}$ et $\varphi'(t)=\dfrac{\pi-t}{4}$.

On en déduire le tableau des variations de $\varphi*\varphi$:

t	0		π
$(\varphi*\varphi)'(t)$		$+$	0
$\varphi*\varphi(t)$		$\nearrow$	

b. On a :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\quad c_n(\varphi * \varphi) = c_n(\varphi)c_n(\varphi) = \big(c_n(\varphi)\big)^2.$$

Et :

$$c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi - t}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$$

$$\underset{\text{ipp si }\; n\neq 0}{=} \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi - t}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}}{-\mathrm{i}n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}}{-\mathrm{i}n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{-4\pi\mathrm{i}n}(-\pi-\pi) + \frac{1}{-4\pi\mathrm{i}n}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}}{-\mathrm{i}n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\mathrm{i}n},$$

$$c_0(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\left[\pi t - \frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

On conclut :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{Z},\quad c_n(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\mathrm{i}n} & \text{si} \quad n \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad n = 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{Z},\quad c_n(\varphi * \varphi) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4\pi n^2} & \text{si} \quad n \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad n = 0 \end{cases}}$$

Comme $\varphi * \varphi \in \mathcal{D}$ et que $\varphi * \varphi$ est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de $\varphi * \varphi$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme $\varphi * \varphi$:

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad (\varphi * \varphi)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\varphi * \varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

On a donc :

$$(\varphi * \varphi)(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\frac{1}{4n^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} + \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{4n^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{4n^2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right) = \sum_{n=1}^{+`\infty} -\frac{1}{2n^2}\cos nt.$$

On conclut :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nt}{n^2} = -2(\varphi * \varphi)(t).$$

En particulier :

$$\forall\, t \in [0\,;\pi],\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nt}{n^2} = \frac{1}{12}(3t^2 - 6\pi t + 2\pi^2).$$

c. Les séries numériques $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin na \sin nb}{n^2}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos na \cos nb}{n^2}$ sont absolument convergentes, car la valeur absolue du terme général est majorée par $\frac{1}{n^2}$, et, en notant respectivement S et C leurs sommes, on a :

$$\begin{cases} C+S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos na \cos nb + \sin na \sin nb}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n(b-a)}{n^2} \\ C-S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos na \cos nb - \sin na \sin nb}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n(a+b)}{n^2}, \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} C+S = \dfrac{1}{12}\big(3(b-a)^2 - 6\pi(b-a) + 2\pi^2\big) \\ C-S = \dfrac{1}{12}\big(3(b+a)^2 - 6\pi(b+a) + 2\pi^2\big) \end{cases}$$

et on conclut :

$$\boxed{C = \frac{1}{12}(3a^2 + 3b^2 - 6\pi b + 2\pi^2), \qquad S = \frac{1}{2}a(\pi - b)}$$

Q9 • Montrons d'abord que, si f est C^0 et g est C^1, alors $f*g$ est C^1.

L'application $F : \varDelta = \mathbb{R}\times[-\pi\,;\pi] \longrightarrow \mathbb{C},\quad (t,u) \longmapsto f(u)g(t-u)$ est continue sur $\varDelta$, intégrable en u sur $[-\pi\,;\pi]$, admet une dérivée partielle par rapport à t, $F'_t : (t;u) \longmapsto f(u)g'(t-u)$ qui est continue sur $\varDelta$ et $|F'_u(t,u)|$ est majorée par $||f||_\infty\,||g'||_\infty$ qui est continue et intégrable en u.

D'après le théorème de dérivation pour une intégrale dépendant d'un paramètre, on conclut que $f*g$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\quad (f*g)'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)g'(t-u)\,\mathrm{d}u = (f*g')(t),$$

donc : $(f*g)' = f*g'$.

• Comme la loi $*$ est commutative, il en résulte que, si f est C^1 et si g est C^0, alors $f*g$ est C^1 et $(f*g)' = f'*g$.

• Démontrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante :

pour tout couple $(k,l)\in\mathbb{N}^2$ tel que $k+l\leqslant n$, pour toutes $f,g\in\mathcal{C}$ telles que f soit C^k et g soit C^l, (alors) $f*g$ est C^{k+l} et, pour tout couple $(i,j)\in\mathbb{N}^2$ tel que $0\leqslant i\leqslant k$ et $0\leqslant j\leqslant l$, on a $(f*g)^{(i+j)} = f^{(i)}*g^{(j)}$.

$\mathcal{P}_0$ est trivialement vraie.

$\mathcal{P}_1$ est vraie, comme on vient de le montrer.

Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n\in\mathbb{N}^*$ fixé.

Soient $(k,l)\in\mathbb{N}^2$ tel que $k+l=n+1$, $f,g\in\mathcal{C}$ telles que f soit C^k et g soit C^l.

Si $l\geqslant 1$, alors $k+(l-1)=n$, f est C^k, g' est C^{l-1}, donc, d'après $\mathcal{P}_n$, $f*g'$ est C^{k+l-1} et on connaît les dérivées successives de $f*g'$. Mais alors, $f*g$ est C^{k+l}.

Si $l=1$, échanger (k,f) et (l,g).

On déduit ainsi que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui montre $\mathcal{P}_n$ par récurrence sur n.

Par exemple, si f et g sont C^1, alors $f*g$ est C^2 et :

$$(f*g)'' = f''*g = f'*g' = f*g''.$$

$\boxed{\textbf{Q10}}$ **a.** • Pour $k = 0$, si $f \in \mathcal{D}$, alors, d'après Q6, $c_n(f) \underset{|n| \longrightarrow +\infty}{=} o(1)$, d'où la propriété voulue.

• Soit $f \in \mathcal{D}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Il est clair qu'alors $f' \in \mathcal{C}$ (donc $f' \in \mathcal{D}$), donc $c_n(f') \underset{|n| \longrightarrow +\infty}{=} o(1)$. Mais, par une intégration par parties :

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\big[f(t)\mathrm{e}^{-int}\big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{i}n\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}c_n(f).$$

Ainsi : $\mathrm{i}nc_n(f) = o(1)$, donc $c_n(f) = o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$.

• Si f est de classe C^k, alors $c_n(f^{(k)}) = (\mathrm{i}n)^k c_n(f)$, et $c_n(f) = o(1)$, donc $c_n(f^{(k)}) = o\Big(\dfrac{1}{n^k}\Big)$.

b. Récurrence sur k.

• Cas $k = 2$

Nous supposons $c_n(f) = o(n^{-2})$. Alors la suite $\big(c_n(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et donc la série d'applications $c_0(f) + \displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\big(c_k(f)e_k + c_{-k}(f)e_{-k}\big)$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$.
Sa somme, notée g, est donc continue et 2π-périodique, c'est-à-dire $g \in \mathcal{C}$.
Puisque cette série de fonctions converge uniformément sur $[-\pi\,;\pi]$, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par permutation série-intégrale :

$$c_n(g) = \Big(e_n \,\Big|\, c_0(f) + \sum_{k=1}^{+\infty}\big(c_k(e_k + c_{-k}e_{-k}\big)\Big)$$
$$= c_0(f)(e_n \,|\, e_0) + \sum_{k=1}^{+\infty}\big(c_k(f)(e_n \,|\, e_k) + c_{-k}(f)(e_n \,|\, e_{-k})\big) = c_n(f),$$

car la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale.
Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ \ c_n(g) = c_n(f)$, c'est-à-dire $\mathit{\Gamma}(g) = \mathit{\Gamma}(f)$. Comme $\mathit{\Gamma}$ est injective, on déduit $f = g$, donc f est de classe C^0.

• Suppsoons la propriété vraie pour un entier $k \geqslant 2$, et soit $f \in \mathcal{D}$ telle que : $c_n(f) = o(n^{-k-1})$.
En particulier, $c_n(f) = o(n^{-2})$, donc (cf. le cas $k = 2$), f est C^0.
Puisque

$$|\mathrm{i}nc_n(f)| = n|c_n(f)| = o(n^{-k-1+1}) = o(n^{-k}),$$

et que $k \geqslant 2$, la série d'applications $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\big(\mathrm{i}kc_n(f)e_k - \mathrm{i}kc_{-k}(f)e_{-k}\big)$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$. Sa somme h est donc continue et 2π-périodique, $h \in \mathcal{C}$.
Considérons une primitive f_1 de h sur $\mathbb{R}$.
Comme :

$$\forall\, a \in \mathbb{R},\quad \int_{a-\pi}^{a+\pi} h(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi c_n(h) = 0,$$

on a :

$$\forall\, a \in \mathbb{R},\quad f_1(a+\pi) = f_1(a-\pi),$$

donc f_1 est 2π-périodique.
Ainsi : $f_1 \in \mathcal{D}$, et même $f_1 \in \mathcal{C}$.

Puis :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(h) = \mathrm{i}nc_n(f_1) \quad \text{et} \quad c_n(h) = \mathrm{i}nc_n(f),$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f_1) = c_n(f).$$

Autrement dit : $\Gamma(f_1) = \Gamma(f)$. Comme Γ est injective, on conclut $f = f_1$, donc f est de classe C^1 et $f' = f_1' = h$.

Enfin, comme $c_n(h) = \mathrm{i}nc_n(f) = o(n^{-k})$, h est de classe C^{k-2} par l'hypothèse de récurrence, et finalement f est de classe C^{k-1}, ce qui montre le résultat voulu, par récurrence sur k.

Q11 Par existence de racine carrée dans $\mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe $\gamma_n \in \mathbb{C}$ tel que $\gamma_n^2 = c_n(f)$.

Puisque $k \geqslant 4$, on a :

$$|\gamma_n| = |c_n(f)|^{\frac{1}{2}} = o(n^{-\frac{4}{2}}) = o(n^{-2}),$$

donc la famille $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, et donc la série d'applications $\gamma_0 e_0 + \sum\limits_{k\geqslant 1}(\gamma_k e_k + \gamma_{-k}e_{-k})$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$. Notons g sa somme, qui est continue et 2π-périodique, comme dans Q11.

Par convergence uniforme (permutation série-intégrale), comme en Q11, on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \gamma_n = c_n(g).$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(g * g) = \big(c_n(g)\big)^2 = \gamma_n^2 = c_n(f),$$

c'est-à-dire : $\Gamma(g * g) = \Gamma(f)$, puis, par injectivité de Γ : $g * g = f$.

On peut remarquer que cette équation (d'inconnue g) admet, "en général", une infinité de solutions, due au choix des γ_n à des signes près.

Q12 **a.** • P_r est correctement définie sur $\mathbb{R}$, car :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 1 - 2r\cos t + r^2 = (1 - r\cos t)^2 + (r\sin t)^2 \geqslant (1 - r\cos t)^2 \geqslant \big(1 - |r\cos t|\big)^2 \geqslant (1-r)^2 > 0.$$

- $\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_r(t) > 0.$
- P_r est paire.
- P_r est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- P_r est 2π-périodique.
- $P_r(0) = \dfrac{1-r^2}{1-2r+r^2} = \dfrac{1+r}{1-r}, \qquad P_r(\pi) = \dfrac{1-r^2}{1+2r+r^2} = \dfrac{1-r}{1+r}.$
- $\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_r'(t) = \dfrac{-(1-r^2)2r\sin t}{(1-2r\cos t + r^2)^2}.$
- Pour $r = \dfrac{3}{4}$, $P_r(0) = 7$, $P_r(\pi) = \dfrac{1}{7}$.
-

t	0		π
$P_r'(t)$	0	$-$	0
$P_r(t)$		$\searrow$	

b. Soit $r \in]0\,;1[$. On a déjà vu ci-dessus que P_r est continue et 2π-périodique.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Les séries numériques de termes généraux $r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$, $r^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}$, $r^n \cos nt$ sont absolument convergentes, car $|r| < 1$ et on a :

$$1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos nt = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}) = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt})^n$$

$$= -1 + \frac{1}{1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} + \frac{1}{1 - r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}} = \frac{-(1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})(1 - r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}) + 1 - r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + 1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{(1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})(1 - r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2} = P_r(t).$$

c. Soient $r \in]0\,;1[$, $n \in \mathbb{Z}$. D'après b., on a :

$$c_n(P_r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} r^k \cos kt\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} (r^k \cos kt\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt})\,\mathrm{d}t.$$

Comme la série d'applications $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \big(t \longmapsto r^k \cos kt\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\big)$ converge normalement (donc uniformément) sur $[-\pi\,;\pi]$, on peut permuter intégrale et série, d'où :

$$c_n(P_r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t.$$

On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = (e_n \mid e_k) + (e_n \mid e_{-k}) = \begin{cases} 0 & \text{si } |n| \neq k \\ 1 & \text{si } |n| = k (\neq 0). \end{cases}$$

Ainsi, si $n = 0$, alors $c_n(P_r) = 1 + 0 = 1$ et, si $n \neq 0$, alors $c_n(P_r) = 0 + r^{|n|}$.

On conclut :

$$\boxed{\forall\, r \in]0\,;1[,\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\quad c_n(P_r) = r^{|n|}}$$

d. Soit $(r, s) \in]0\,;1[^2$. D'après Q12c., on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\quad c_n(P_r * P_s) = c_n(P_r)c_n(P_s) = r^{|n|}s^{|n|} = (rs)^{|n|} = c_n(P_{rs}).$$

D'où $\mathit{\Gamma}(P_r * P_s) = \mathit{\Gamma}(P_{rs})$, puis, par injectivité de $\mathit{\Gamma}$: $P_r * P_s = P_{rs}$.

Q13 **a.** Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

On a, pour tout $r \in]0\,;1[$ et tout $t \in [-\pi\,;\pi]$:

$$\big|(P_r * f)(t)\big| = \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(u)f(t-u)\,\mathrm{d}u - f(t)\Big| = \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(u)\big(f(t-u) - f(t)\big)\,\mathrm{d}u,$$

car $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(u)\,\mathrm{d}u = c_0(P_r) = 1.$

Puis :

$$\big|(P_r * f)(t)\big| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(u)\big|f(t-u) - f(t)\big|\,\mathrm{d}u,$$

car $P_r \geqslant 0$.

Puisque f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (t', t'') \in \mathbb{R}^2, \quad \Big(|t' - t''| \leqslant \eta \implies |f(t') - f(t'')| \leqslant \varepsilon \Big).$$

Découpons en trois intégrales :

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(u) |f(t-u) - f(t)| \, \mathrm{d}u = \int_{-\pi}^{-\eta} + \int_{-\eta}^{\eta} + \int_{\eta}^{\pi}.$$

On a :

$$\int_{-\eta}^{\eta} P_r(u) |f(t-u) - f(u)| \, \mathrm{d}u \leqslant \int_{-\eta}^{\eta} P_r(u) \varepsilon \, \mathrm{d}u \leqslant \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} P_r(u) \, \mathrm{d}u = \varepsilon 2\pi c_0(P_r) = \varepsilon 2\pi.$$

et :

$$\int_{-\pi}^{-\eta} + \int_{\eta}^{\pi} \leqslant \int_{-\pi}^{-\eta} P_r(u) 2||f||_\infty \, \mathrm{d}u + \int_{\eta}^{\pi} P_r(u) 2||f||_\infty \, \mathrm{d}u \underset{P_r \text{ est paire}}{=} 4||f||_\infty \int_{\eta}^{\pi} P_r(u) \, \mathrm{d}u$$

$$\underset{P_r \text{ décroît}}{=} \leqslant 4||f||_\infty (\pi - \eta) P_r(\eta) = \frac{4||f||_\infty (\pi - \eta)(1 - r^2)}{1 - 2r\cos\eta + r^2}.$$

Comme η est fixé, cette dernière expression tend vers 0 lorsque r tend vers 1^-.
Il existe donc $\alpha \in]0\,;\eta[$ tel que :

$$\forall r \in [1 - \alpha\,; 1[, \quad \frac{1}{2\pi} \frac{4||f||_\infty (\pi - \eta)(1 - r^2)}{1 - 2r\cos\eta + r^2} \leqslant \varepsilon.$$

On obtient ainsi :

$$\forall r \in]0\,;1[, \quad \Big(|r - 1| \leqslant \varepsilon \implies \big(\forall t \in [-\pi\,;\pi], \quad |(P_r * f)(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon \big) \Big) \implies ||P_r * f - f||_\infty \leqslant \varepsilon,$$

c'est-à-dire :

$$||P_r * f - f||_\infty \underset{r \,\longrightarrow\, 1^-}{\longrightarrow} 0.$$

b. Immédiat à partir de a., puisque les P_r sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{Q14}}$ **a.** Si $f \in \mathcal{C}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, alors $f' \in \mathcal{C}$ et, comme $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f') = \mathrm{i}n c_n(f)$, d'après Q5, la suite $\big(\mathrm{i}n c_n(f)\big)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, donc $\big(n c_n(f)\big)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2$.

b. Considérons l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, 2π-périodique, définie par $f(t) = |t|^{2/3}$ pour $t \in [-\pi\,;\pi]$.
Il est clair que $f \in \mathcal{C}$ et que f est paire.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = c_n(f^\vee) = c_{-n}(f).$$

Il suffit donc de s'intéresser à la convergence absolue de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} c_n(f)$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \Big(\int_{-\pi}^{0} (-t)^{2/3} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \, \mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} t^{2/3} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \, \mathrm{d}t \Big)$$

$$\underset{u = -t}{=} \frac{1}{2\pi} \Big(\int_{0}^{\pi} u^{2/3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nu} \, \mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} t^{2/3} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \, \mathrm{d}t \Big) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} t^{2/3} \cos nt \, \mathrm{d}t.$$

Comme l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{\pi} t^{-1/3}\sin nt\,\mathrm{d}t$ converge, on peut intégrer par parties :

$$c_n(f) = \frac{1}{\pi}\Big[t^{2/3}\frac{\sin nt}{n}\Big]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2}{3}t^{-1/3}\frac{\sin nt}{n}\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{3\pi n}\int_0^{\pi} t^{-1/3}\sin nt\,\mathrm{d}t$$

$$\underset{u=nt}{=} -\frac{2}{3\pi n}\int_0^{\pi n}\Big(\frac{u}{n}\Big)^{-1/3}\sin u\frac{1}{n}\,\mathrm{d}u = -\frac{2}{3\pi n^{5/3}}\int_0^{\pi n}\frac{\sin u}{u^{1/3}}\,\mathrm{d}u.$$

Comme l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u^{1/3}}\,\mathrm{d}u$ converge, la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{\pi n}\frac{\sin u}{u^{1/3}}\,\mathrm{d}u$ converge, donc est bornée. Il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad \Big|\int_0^{\pi n}\frac{\sin u}{u^{1/3}}\,\mathrm{d}u\Big| \leqslant M.$$

On a donc : $\qquad \displaystyle\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad |c_n(f)| \leqslant \frac{2M}{3\pi n^{5/3}},$

d'où : $\qquad \displaystyle|nc_n(f)| \leqslant \frac{2M}{3\pi n^{2/3}},$

puis : $\qquad \displaystyle|nc_n(f)|^2 \leqslant \frac{4M^2}{9\pi^2 n^{4/3}},$

donc, comme $4/3 > 1$, d'après l'exemple de Riemann et le théorème de majoration, la suite $\big((nc_n(f))^2\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, $\big(nc_n(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$.

D'autre part, il est clair que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, puisque f n'est pas dérivable en 0.

Q15 **a.** • La linéarité de L_f est immédiate :

$$L_f(\alpha g + h) = f*(\alpha g + h) = \alpha f*g + f*h = \alpha L_f(g) + L_f(h),$$

avec des notations évidentes.

• Soient $g\in\mathcal{D}$, $t\in\mathbb{R}$.

On a : $\displaystyle |L_f(t)| = |(f*g)(t)| = \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u\Big| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(u)|\,|g(t-u)|\,\mathrm{d}u.$

1) $\displaystyle |L_f(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}||f||_\infty|g(t-u)|\,\mathrm{d}u = ||f||_\infty\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(v)|\,\mathrm{d}v = ||f||_\infty||g||_1$

2)

$$|L_f(t)| \underset{\text{Cauchy et Schwarz}}{\leqslant} \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{\pi}|f(u)|^2\,\mathrm{d}u\Big)^{1/2}\Big(\int_{-\pi}^{\pi}|g(t-u)|^2\,\mathrm{d}u\Big)^{1/2}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\big(2\pi||f||_2^2\big)^{1/2}\big(2\pi||g||_2^2\big)^{1/2} = ||f||_2||g||_2$$

3) $\displaystyle |L_f(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(u)|\,||g||_\infty\,\mathrm{d}u = ||f||_1||g||_\infty.$

On en déduit l'inégalité demandée.

b. On suppose que f est paire et à valeurs réelles. On a alors, pour toutes $g_1, g_2\in\mathcal{D}$:

$$\big(L_f(g_1)\,\big|\,L_f(g_2)\big) = (f*g_1\,|\,g_2) = \big((\overline{f*g_1})*g_2^\vee\big)(0) = (\overline{f}*\overline{g_1}*g_2^\vee)(0)$$
$$= (\overline{g_1}*f^\vee*g_2^\vee)(0) = \big(\overline{g_1}*(f*g_2)^\vee\big)(0) = (g_1\,|\,f*g_2) = \big(g_1\,\big|\,L_f(g_2)\big),$$

donc L_f est symétrique.

Q16 Soit $n \in \mathbb{Z}$. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{D} - \{0\}$. On a :

$$L_{e_n}(f) = \lambda f \iff e_n * f = \lambda f \iff c_n(f) e_n = \lambda f.$$

Pour $\lambda = 0$: $L_{e_n}(f) = 0 \iff c_n(f) = 0$.

Pour $\lambda \neq 0$: $L_{e_n}(f) = \lambda f \implies f = \dfrac{c_n(f)}{\lambda} e_n \implies f \in \mathbb{C}e_n$ et on a : $L_{e_n}(e_n) = e_n * e_n = e_n$.

Finalement :

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(L_{e_n}) = \{0, 1\}, \quad \mathrm{SEP}\,(L_{e_n}, 0) = \big\{f \in \mathcal{D}\,;\, c_n(f) = 0\big\}, \quad \mathrm{SEP}\,(L_{e_n}, 1) = \mathbb{C}e_n}$$

Q17 Soient $f \in \mathcal{D}$, $h \in]0\,;\pi[$.

• On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f_h(t + 2\pi) = \frac{1}{2h} \int_{t+2\pi-h}^{t+2\pi+h} f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} f(u)\,\mathrm{d}u = f_h(t),$$

donc f_h est 2π-périodique.

L'application $F : u \longmapsto \displaystyle\int_0^u f(v)\,\mathrm{d}v$ est lipschitzienne, car, pour tout $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$|F(u_1) - F(u_2)| = \left| \int_{u_1}^{u_2} f(v)\,\mathrm{d}v \right| \leqslant \left| \int_{u_1}^{u_2} |f(v)|\,\mathrm{d}v \right| \leqslant |u_2 - u_1|\, ||f||_\infty,$$

donc F est continue sur $\mathbb{R}$.

Comme $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_h(t) = \dfrac{1}{2h}\big(F(t+h) - F(t-h)\big)$, on en déduit, par opérations, que f_h est continue sur $\mathbb{R}$.

Finalement : $f_h \in \mathcal{C}$.

Q18 • La linéarité de S_h est immédiate :

$$\begin{aligned}\forall f, g \in \mathcal{D},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\quad S_h(\alpha f + g)(t) &= \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} (\alpha f + g)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \alpha \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} g(t)\,\mathrm{d}t = \alpha f_h(t) + g_h(t) = \big(\alpha S_h(f) + S_h(g)\big)(t).\end{aligned}$$

• D'après Q17, toutes les f_h sont dans $\mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C}$ est inclus strictement dans $\mathcal{D}$, on en déduit que S_h n'est pas surjective.

$\boxed{\textbf{Q19}}$ Soient $f \in \mathcal{D}$, $h \in \,]0\,;\pi[$, $n \in \mathbb{Z}$.

On a :

$$c_n(f_h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_h(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} f(u)\,\mathrm{d}u\Big)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi h}\iint_D f(u)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t,$$

où : $D = \Big\{(t,u) \in \mathbb{R}^2\,;\, -\pi \leqslant t \leqslant \pi \ \text{ et } \ t-h \leqslant u \leqslant t+h\Big\}$.

Comme :

$$\forall\,(t,u) \in \mathbb{R}^2, \quad f(u+2\pi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(t+2\pi)} = f(u)\mathrm{e}^{-int},$$

on a aussi, d'après le théorème de Fubini :

$$c_n(f_h) = \frac{1}{2\pi h}\iint_\Delta f(u)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u,$$

où :

$$\Delta = \big\{(t,u) \in \mathbb{R}^2\,;\, -\pi-h \leqslant u \leqslant \pi-h \ \text{ et } \ u-h \leqslant t \leqslant u+h\big\}.$$

D'où :

$$c_n(f_h) = \frac{1}{4\pi h}\int_{-\pi-h}^{\pi+h} f(u)\Big(\int_{u-h}^{u+h}\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}\,u$$

$$\underset{\text{si } n\neq 0}{=} \frac{1}{4\pi h}f(u)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(u+h)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(u-h)}}{-\mathrm{i}n}\,\mathrm{d}u = \frac{-2\mathrm{i}\sin nh}{-4\pi h\mathrm{i}n}\int_{-\pi-h}^{\pi-h} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nu}\,\mathrm{d}u = \frac{\sin nh}{nh}c_n(f),$$

et

$$c_0(f_h) = \frac{1}{4\pi h}\int_{-\pi-h}^{\pi-h} 2hf(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_{[2\pi]} f(u)\,\mathrm{d}u = c_0(f).$$

On conclut :

$$\boxed{\forall\, f \in \mathcal{D},\ \forall\, h \in \,]0\,;\pi[,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f_h) = \begin{cases} \dfrac{\sin nh}{nh}c_n(f) & \text{si} \quad n \neq 0 \\ c_0(f) & \text{si} \quad n = 0 \end{cases}}$$

$\boxed{\textbf{Q20}}$ Soit $h \in \,]0\pi[$. On a, pour toute $f \in \mathcal{D}$:

$$f \in \operatorname{Ker}(S_h) \iff f_h = 0 \iff \big(\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f_h) = 0\big) \iff \begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{Z}^*, \quad \dfrac{\sin nh}{nh}c_n(f) = 0 \\ c_0(f) = 0. \end{cases}$$

1) Si $\dfrac{h}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, alors $\big(\forall\, n \in \mathbb{Z}^*, \quad \sin nh \neq 0\big)$, donc :

$$\forall\, f \in \mathcal{D}, \quad f \in \operatorname{Ker}(S_h) \iff \big(\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = 0\big) \iff f = 0,$$

et donc S_h est injective.

2) Supposons $\dfrac{h}{\pi} \in \mathbb{Q}$. Il existe $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $\dfrac{h}{\pi} = \dfrac{p}{q}$ et $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$.

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$: $\sin nh = 0 \iff n\dfrac{p}{q}\pi \in \pi\mathbb{Z}^* \iff np \in q\mathbb{Z}^* \iff q \mid n,$

car $p \wedge q = 1$, théorème de Gauss.

Donc : $S_h(e_q) = 0$ et $e_q \neq 0$, donc S_h n'est pas injective.

Finalement, S_h est injective si et seulement si $\dfrac{h}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

$\boxed{\textbf{Q21}}$ **a.** On a, pour tous $h \in]0\,;\pi[$, $t \in \mathbb{R}$:

$$|f_h(t)-f(t)| = \left|\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} f(u)\,\mathrm{d}u - f(t)\right| = \left|\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} \big(f(u)-f(t)\big)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{t-h}^{t+h} |f(u)-f(t)|\,\mathrm{d}u.$$

Puisque $f \in \mathcal{C}$, f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall\,(t',t'') \in \mathbb{R}^2,\quad \Big(|t'-t''| \leqslant \eta \implies \big|f(t')-f(t'')\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

On a alors, pour tout $h \in]0\,;\pi[$ tel que $h \leqslant \eta$:

$$\forall\,u \in [t-h\,;t+h],\quad |u-t| \leqslant h \leqslant \eta,$$

donc :

$$\forall\,u \in [t-h\,;t+h],\quad |f(u)-f(t)| \leqslant \varepsilon,$$

d'où :

$$\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} |f(u)-f(t)|\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{2h}2h\varepsilon = \varepsilon.$$

Ainsi :

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\eta > 0,\ \ \forall\,h \in]0\,;\pi[,\ \ \Big(h \leqslant \eta \implies \big(\forall\,t \in \mathbb{R},\ \ |f_h(t)-f(t)| \leqslant \varepsilon\big)\Big).$$

c'està-dire :

$$\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\eta > 0, \forall\,h \in]0\,;\pi[,\ \ \big(h \leqslant \eta \implies ||f_h - f||_\infty \leqslant \varepsilon\big),$$

donc : $||f_h - f||_\infty \underset{h\,\longrightarrow\,0^+}{\longrightarrow} 0$.
Autrement dit, la famille $(f_h)_{h\in]0\,;\pi[}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ lorsque h tend vers 0^+.

b. D'après a., $||f_{1/n} - f||_\infty \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme chaque $f_{1/n}$ est de classe C^1 et que $f_{1/n}$ converge uniformément vers f lorsque l'entier n tend vers l'infini, on conclut que f esr limite uniforme d'une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c. Soients $h \in]0\,;\pi[$, $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}|f_h(t)-f(t)| \leqslant \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} |f(u)-f(t)|\,\mathrm{d}u \ &\underset{\text{IAF}}{\leqslant}\ \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} |u-t|\,||f'||_\infty\,\mathrm{d}u \\ &\underset{v=u-t}{=} \frac{||f'||_\infty}{2h}\int_{-h}^{h} |v|\,\mathrm{d}v = \frac{||f'||_\infty}{h}\int_0^h v\,\mathrm{d}v = \frac{||f'||_\infty}{h}\frac{h^2}{2} = \frac{h}{2}||f'||_\infty.\end{aligned}$$

****