Lycée La Martinière Monplaisir

Jean-Marie Monier

Agrégation interne de Mathématiques 2007-2008

Épreuve du samedi 8 décembre 2007

Si un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale sur sa copie et devra poursuivre sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il (elle) est amené(e) à prendre.

I. Étude d'une loi de composition interne dans $\mathbb{R}_+$

Pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on note :

$$a * b = \begin{cases} \dfrac{ab}{a+b} & \text{si} \quad (a,b) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (a,b) = (0,0). \end{cases}$$

Ainsi, si $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $a * b \neq 0$ et : $\dfrac{1}{a*b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

1. *a)* Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{R}_+$, commutative, associative ; $*$ admet-elle un neutre ?

b) Montrer : $\forall\,(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+)^3, \quad (a*b)c = (ac)*(bc)$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ et tous $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$a_1 * \cdots * a_n = \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}$$

où σ_{n-1} et σ_n sont les fonctions symétriques élémentaires numéros $n-1$ et n associées à $a_1, ..., a_n$, c'est-à-dire que σ_{n-1} est la somme des produits $n-1$ à $n-1$ et que σ_n est le produit de $a_1, ..., a_n$.

3. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \ \forall\, a \in \mathbb{R}_+, \quad a * \cdots * a = \dfrac{a}{n}$,

où $a * \cdots * a$ comporte n facteurs pour la loi $*$.

4. *a)* Démontrer :

$$\forall\,(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (a*b)x^2 = \operatorname*{Inf}_{(y,z)\in\mathbb{R}^2,\, y+z=x} (ay^2 + bz^2).$$

b) Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $x \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des couples $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\begin{cases} y_0 + z_0 = x \\ (a*b)x^2 = ay_0^2 + bz_0^2. \end{cases}$$

Notations et rappels pour les parties II et III

- n désigne un entier tel que $n \geqslant 1$
- $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et une colonne
- Le produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est défini par : $(X, Y) \longmapsto {}^{\mathrm{t}}XY$
- $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels
- $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ est le groupe linéaire d'ordre n, c'est-à-dire l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre n inversibles
- I_n est la matrice identité de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$
- Pour $(d_1, ..., d_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{diag}(d_1, ..., d_n)$ est la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont, dans l'ordre, $d_1, ..., d_n$
- Pour toute $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}\,(A)$ est la trace de A, c'est-à-dire la somme des termes de la diagonale de A
- $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques
- $\mathbf{S}_n^+$ est l'ensemble des matrices symétriques positives d'ordre n, c'est-à-dire l'ensemble des $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall\, X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^{\mathrm{t}}XSX \geqslant 0$
- $\mathbf{S}_n^{++}$ est l'ensemble des matrices symétriques définies-positives d'ordre n, c'est-à-dire l'ensemble des $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall\, X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\},\ {}^{\mathrm{t}}XSX > 0$.

Pour $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, on note :

$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de A

$\mathrm{Ker}\,(A) = \{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}); AX = 0\}$

$\mathrm{Im}\,(A) = \{Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})\,;\, \exists X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad Y = AX\}$.

II. Quelques propriétés des matrices symétriques réelles

1. *a)* Rappeler l'énoncé du théorème de réduction pour une matrice symétrique réelle.

b) Soient $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, λ_0 la plus petite valeur propre réelle de S. Montrer :

$$\forall\, X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad {}^{\mathrm{t}}XSX \geqslant \lambda_0\, {}^{\mathrm{t}}XX.$$

c) Soit $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Im}\,(S)$ est l'orthogonal de $\mathrm{Ker}\,(S)$ pour le produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

d) Démontrer que, pour toute $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$:

$S \in \mathbf{S}_n^+ \implies \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+$

$S \in \mathbf{S}_n^{++} \implies \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

e) Établir : $\mathbf{S}_n^{++} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

2. *a)* Démontrer : $\forall S \in \mathbf{S}_n^+,\ \exists R \in \mathbf{S}_n^+,\quad S = R^2.$

b) En déduire que, pour toute $S \in \mathbf{S}_n^+$, et tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$^{\mathrm{t}}XSX = 0 \implies SX = 0.$$

3. Établir, pour tout $(A, B) \in (\mathbf{S}_n^+)^2$:

a) $\mathrm{Ker}\,(A+B) = \mathrm{Ker}\,(A) \cap \mathrm{Ker}\,(B)$

b) $\mathrm{Im}\,(A+B) = \mathrm{Im}\,(A) + \mathrm{Im}\,(B)$.

4. Soient $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, $X, Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $SX = SY$. Montrer : $^{\mathrm{t}}XSX = {}^{\mathrm{t}}YSY$.

5. Soient $S \in \mathbf{S}_n^+$, $U \in \mathrm{Im}\,(S)$, $f : \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = {}^{\mathrm{t}}XSX - 2\,{}^{\mathrm{t}}UX.$$

Soit $X_0 \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $U = SX_0$.

a) Montrer : $\forall H \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad f(X_0 + H) = f(X_0) + {}^{\mathrm{t}}HSH.$

b) En déduire que f admet une borne inférieure et que celle-ci est atteinte en X_0.

III. Extension de la loi $*$ à des matrices symétriques positives

1. Définition de $A * B$ pour $(A, B) \in (\mathbf{S}_n^+)^2$

Soit $(A, B) \in (\mathbf{S}_n^+)^2$.

a) Montrer qu'il existe $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = (A+B)M$. (On pourra utiliser le résultat de II 3.*b)* et remarquer que $\mathrm{Im}\,(B) \subset \mathrm{Im}\,(A+B)$.)

b) Établir que le produit AM ne dépend pas du choix de la matrice M de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = (A+B)M$. (On pourra utiliser le résultat de II 3.*a)*.)

c) Démontrer que AM est symétrique.

Pour $(A, B) \in (\mathbf{S}_n^+)^2$, on note $A * B$ la matrice AM où M est n'importe quelle matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = (A+B)M$.

d) Montrer que $A * B$ est inversible si et seulement si A et B sont inversibles.

e) Montrer que, pour $n = 1$, on retrouve la définition de $a * b$ vue dans la partie I.

f) Calculer $A * B$ dans l'exemple : $n = 3,\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

2. *a)* Montrer que, pour tout $(A, B) \in (\mathbf{S}_n^+)^2$, et tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$^{\mathrm{t}}X(A * B)X = \operatorname*{Inf}_{(Y,Z) \in \left(\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2,\, Y+Z=X} \left({}^{\mathrm{t}}YAY + {}^{\mathrm{t}}ZBZ\right),$$

et que cette borne inférieure est atteinte.

b) En déduire : $\forall (A, B) \in (\mathbf{S}_n^+)^2,\quad A * B \in \mathbf{S}_n^+.$

3. *a)* Montrer que la loi $*$ est une loi de composition interne dans $\mathbf{S}_n^+$ commutative et associative.

b) Montrer que, pour tout $(A, B) \in (\mathbf{S}_n^+)^2$:

$$\mathrm{Im}\,(A * B) \subset \mathrm{Im}\,(A) \cap \mathrm{Im}\,(B) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}\,(A * B) \supset \mathrm{Ker}\,(A) + \mathrm{Ker}\,(B).$$

4. Démontrer que, si $(A, B) \in (\mathbf{S}_n^+)^2$ est tel que $A + B \in \mathbf{S}_n^{++}$, alors :

$$A * B \;=\; A(A+B)^{-1}B \;=\; B(A+B)^{-1}A \;=\; A - A(A+B)^{-1}A \;=\; B - B(A+B)^{-1}B.$$

5. *a)* Démontrer que, si $(A, B) \in \mathbf{S}_n^{++} \times \mathbf{S}_n^+$, alors :

$$A * B = (\mathrm{I}_n + BA^{-1})^{-1}B.$$

b) Démontrer que, si $(A, B) \in (\mathbf{S}_n^{++})^2$, alors :

$$A * B = (A^{-1} + B^{-1})^{-1}.$$

6. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n,\ \mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{R}_+$, $A = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $B = \mathrm{diag}\,(\mu_1, ..., \mu_n)$. Calculer $A * B$.

7. *a)* Soit $(A, B) \in (\mathbf{S}_n^+)^2$. Établir :

$$\forall\, X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ {}^{\mathrm{t}}X(A * B)X \leqslant ({}^{\mathrm{t}}XAX) * ({}^{\mathrm{t}}XBX).$$

b) En déduire que, pour tous $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i * b_i) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) * \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

c) Soit $(A, B, C, D) \in (\mathbf{S}_n^+)^4$. Établir :

$$\forall\, X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ {}^{\mathrm{t}}X(A * C)X +{}^{\mathrm{t}} X(B * D)X \ \leqslant\ {}^{\mathrm{t}}X((A+B) * (C+D))X.$$

d) Démontrer :

$$\forall\, (A, B) \in (\mathbf{S}_n^+)^2,\ \ \mathrm{tr}\,(A * B) \leqslant \mathrm{tr}\,(A) * \mathrm{tr}\,(B).$$

8. Soit $(A, B) \in (\mathbf{S}_n^+)^2$.

a) Montrer que tout vecteur propre commun à A et B est vecteur propre de $A * B$.

b) On note λ (resp. μ, resp. ν) la plus petite valeur propre de A (resp. B, resp. $A * B$). Démontrer : $\nu \geqslant \lambda * \mu$.

c) Donner un exemple (pour $n = 2$), dans lequel l'inégalité précédente est stricte.

* *