Ag-int. Corrig partiel du Pb du 23-11-05.GC

Attntion probleme avec les accents, a completer

1 Convolution.

1. La continuit de $f*g$ vient du fait que $(x,t)\to f(x-t)g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}\times[-\pi,\pi]$.
   La priodicit de $f*g$ est une consquence de celle de f. $\boxed{f*g\in\mathcal{C}_{2\pi}}$.
   $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t=\int_x^{2\pi+x} f(u)g(x-u)\,\mathrm{d}u$ par changement de variable. Mais $u\to f(u)g(x-u)$ est 2π priodique, donc $\displaystyle\int_x^{2\pi+x} f(u)g(x-u)\,\mathrm{d}u=\int_0^{2\pi} f(u)g(x-u)\,\mathrm{d}u$. Donc $\boxed{f*g=g*f}$.
   $\boxed{N_\infty(f*g)\leq N_\infty(f)N_\infty(g)}$ est facile.

2. $\underline{f*e_k(x)}=e_k*f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{[2\pi]} f(t)\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}k(t-x)}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kx}\int_{[2\pi]} f(t)\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t=\underline{c_k(f)e_k(x)}$.

   Par linarit, on dduit $\forall P\in\mathcal{P}_n, f*P\in\mathcal{P}_n$. Si $P=D_n$, on obtient : $\underline{f*D_n}=\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k=\underline{S_n(f)}$.

2 Noyau de Fjer.

1. $c_k(K_n)=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{n} c_k(D_j)$. Pout tout $j\in[0,n], c_k(D_j)=\displaystyle\sum_{p=-j}^{j} c_k(e_p)=\sum_{p=-j}^{j}\delta_{k,p}$.
   Donc, $c_k(D_j)=1$ si $|k|\leq j$ et 0 sinon.
   Donc , si $|k|>n, c_k(K_n)=0$.
   Si $|k|\leq n$: $c_k(K_n)=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{j=|k|}^{n} c_k(D_j)=\dfrac{1}{n+1}(n-|k|+1)=1-\dfrac{|k|}{n+1}$.
   En dfinitive, $\boxed{c_k(K_n)=1-\dfrac{|k|}{n+1}\text{si}\,|k|\leq n\,\text{et}\,0\text{ sinon}}$.

2. K_n tant un polynme trigonomtrique, on peut crire $K_n=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(K_n)e_k$, (la somme tant finie!)
   $\boxed{K_n=\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}(1-\frac{|k|}{n+1})e_k}$.

3. Ce calcul est trs connu et n'est pas corrig.