Ag.int. 17/10/07 de 16h à 18h.GC.

Exercice 1. Suites, séries et intégration.

Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues sur [0,1] à valeurs réelles . Soit $f \in \mathcal{C}$ et $I_n(f) = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

I. Etude de la suite $I_n(f)$.

1. On suppose dans cette question seulement que f est de classe C^1 sur [0,1]. A l'aide d'une intégration par parties, trouver la limite de $nI_n(f)$.

2. a. Soit $f \in \mathcal{C}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|n \displaystyle\int_\alpha^1 t^n(f(t) - f(1))\,\mathrm{d}t| < \frac{\varepsilon}{2}$.

2. b. Montrer que le résultat de 1. est encore vrai pour $f \in \mathcal{C}$.

3. Application. Soit $f(t) = \mathrm{e}^{-t}$. Calculer $I_n(f)$ et déduire de 2. un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

II. Etude de la série $\sum I_n(f)$.

indication : utiliser ds plusieurs questions $\displaystyle\sum_0^n t^k = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}$

1. Soit $f \in \mathcal{C}$. Montrer que $\sum I_n(f)$ converge $\Longrightarrow f(1) = 0$. Et de plus, si f est dérivable en 1, alors la réciproque est vraie.

2. Soit g continue et intégrable sur [0,1[et à valeurs réelles.

2.a. Montrer que $t \to t^n g(t)$ est intégrable sur [0,1[.

2.b. Montrer : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, $| \displaystyle\int_\alpha^1 t^n g(t))\,\mathrm{d}t| < \frac{\varepsilon}{2}$ et en déduire $\lim I_n(g)$.

3. Soit $f \in \mathcal{C}$ et on suppose que $t \to \dfrac{f(t)}{1 - t}\,\mathrm{d}t$ est intégrable sur [0, 1[.
Montrer que $\sum I_n(f)$ converge et que $\displaystyle\sum_0^{+\infty} I_n(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1 - t}$.

4. On suppose de plus f à valeurs positives. Montrer que si $\sum I_n(f)$ converge, alors $t \to \dfrac{f(t)}{1 - t}$ est intégrable sur [0, 1[et l'égalité de 3. est encore vérifiée.

5. Exemple. On définit sur]0,1[la fonction $f : x \to \dfrac{-x}{\ln(1 - x)}$.

5.a. Prolonger f par continuité sur [0,1].

5.b. $\sum I_n(f)$ est elle cv ?

5.c. Examiner f vis à vis de II.1.

III. Etude de la série $\sum(-1)^n I_n(f)$.(*simple !*)

1. Soit $f \in \mathcal{C}$. Montrer que $\sum(-1)^n I_n(f)$ est convergente et que sa somme vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1 + t}$.

2. Applications : Calculer $\displaystyle\sum_0^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n + 1}$. Puis, en utilisant $f(t) = \sqrt{t}$, calculer $\displaystyle\sum_0^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{2n + 1}$.

Exercice 2. un opérateur intégral et équations différentielles.

Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}$. On définit l'application T qui à f associe $\overline{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\overline{f}(0) = f(0)$ et $\overline{f}(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer que si f appartient à $\mathcal{C}$, alors $\overline{f}$ aussi.

2. Montrer que T est un endomorphisme injectif de $\mathcal{C}$. Est il surjectif ?

3. Soit $l(x) = \sqrt{|x|}$. Déterminer $\bar{l}$. En déduire que l appartient à l'image de T.

4. a. Montrer que l'image de T est exactement l'ensemble des applications g continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}^*$, et dont la dérivée g' est continue sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie $\lim\limits_{x\to 0} xg'(x) = 0$.

4. b. Soit l'application m de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $m(0) = 0$ et $m(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$.
m possède t'elle un antécédent par T ?

4.c. Donner un exemple d'application appartenant à l'image de T non dérivable en 0.

5. *Eléments propres de T.*
5.a. Soit λ une valeur propre de T et f un vecteur propre associé à λ.
Montrer d'une part que $f(0) = \lambda f(0)$ et que f vérifie sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$ une équation différentielle du premier ordre que l'on explicitera. Résoudre cette équation différentielle sur chaque intervalle. Distinguer $\lambda = 1$ et $\lambda \neq 1$.

5.b. En déduire l'ensemble des valeurs propres de T et pour chaque valeur propre le sev propre correspondant ainsi que sa dimension.

6. *Application.*
Soit l'équation différentielle

$$(E_\lambda)\ \lambda x y'' - (2\lambda x^2 + 1 - \lambda) y' - 2(2\lambda - 1) x y = 0.$$

6.a. Résoudre E_0.
6.b. Soit y une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $z(x) = 2xy(x) - y'(x)$.
Montrer que si z est un vecteur propre de T associé à λ, alors y est solution de (E_λ) sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

6.c. Trouver toutes les solutions de (E_λ) sur $\mathbb{R}$ qui soient C^2 sur $\mathbb{R}$ dans le cas $\lambda = \frac{1}{4}$.
Dimension de l'ev obtenu ?