Ag-int. Pb du 23-11-05.GC

Soit $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques et à valeurs complexes. Cet espace est muni de la norme $N_\infty(f) = \sup\limits_{t\in[0,2\pi]} |f(t)|$.

Notations et rappels

- Pour tout $k \in \mathbb{Z}, e_k$ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$: $t \to \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n =$ Vect ($e_k,k \in [-n,n]$) et $\mathcal{P} =$ Vect ($e_k,k \in \mathbb{Z}$)
- $\forall n \in \mathbb{N}, D_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} e_k$.
- $\forall k \in \mathbb{Z}, c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{[2\pi]} f(t)\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t$ appelé coefficient de Fourier.
- $\forall n \in \mathbb{N}, S_n(f) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k$ appelée somme partielle de la série de Fourier de f. On rappelle que $S_n(f)$ n'est autre que le projeté orthogonal de f sur $\mathcal{P}_n$ pour le produit scalaire hermitien $< f,g >= \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{[2\pi]} \overline{f}g$.
- $N_1(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{[2\pi]} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ et N_2 est la norme associée au produit scalaire précédent.

1 Convolution.

f et g sont des fonctions de $\mathcal{C}_{2\pi}$.

1. On pose $f * g(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que $f * g \in \mathcal{C}_{2\pi}$, que $f * g = g * f$ et que $N_\infty(f * g) \le N_\infty(f)N_\infty(g)$.
2. Remarquer: $\forall k \in \mathbb{Z}, f * e_k = c_k(f)e_k$. En déduire $\forall P \in \mathcal{P}_n, f * P \in \mathcal{P}_n$. Préciser $f * D_n$.

2 Noyau de Féjer.

On définit $\forall n \in \mathbb{N}, K_n = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} D_k$.

1. Etablir $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z}, c_k(K_n) = 1 - \dfrac{|k|}{n+1}$ si $|k| \le n$ et 0 sinon .
2. Montrer que $K_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} (1 - \dfrac{|k|}{n+1})e_k$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, D_n(t) = \dfrac{\sin((2n+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$ si $t \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ et $2n+1$ sinon.
4. Montrer que $K_n(t) = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\sin((2n+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\right)^2$ si $t \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ et $n+1$ sinon. Donc K_n est un polynôme trigonométrique pair et à valeurs positives.
5. Montrer que $N_1(K_n) = 1$ et établir que $\forall \alpha \in]0,\pi]$, $\lim\limits_n \displaystyle\int_\alpha^\pi K_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

3 Approximation de $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ par la méthode de Féjer.

On évitera d'utiliser Parseval ou Bessel dans ce qui suit, puisque l'un des objectifs est précisément de remontrer Parseval.
f et g sont des fonctions de $\mathcal{C}_{2\pi}$.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) - f * K_n(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t))K_n(t)\,\mathrm{d}t.$
2. On fixe $\alpha \in]0,\pi]$. Montrer que $N_\infty(f - f * K_n) \leq \omega_f(\alpha) + \dfrac{2}{\pi} N_\infty(f) \displaystyle\int_{\alpha}^{\pi} K_n(t)\,\mathrm{d}t$ où $\omega_f(\alpha) = \sup\{|f(s) - f(t)| \,/\, |t-s| \leq \alpha\}$.
3. A l'aide **2.**5., conclure : $\lim\limits_n N_\infty(f - f * K_n) = 0$.
4. Applications.
   (a) $f = 0 \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = 0$.
   (b) Montrer que $N_2(f - f * K_n) \leq N_\infty(f - f * K_n)$. Conclusion?
   (c) $(N_2(f))^2 = \lim\limits_n \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} (|c_k(f)|)^2$.
   (d) $< f,g > = \lim\limits_n \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k(f)} c_k(g)$.

4 Propriétés de la convolution et translations.

1. Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{C}_{2\pi}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}, c_k(f * g) = c_k(f)c_k(g)$. En déduire que la loi $(f,g) \rightarrow f * g$ est associative. Possède -t-elle un élément neutre?
2. Soit $\phi \in \mathcal{C}_{2\pi}$.
   (a) Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $\phi_a(t) = \phi(t-a)$. Vérifier que $\forall k \in \mathbb{Z}, c_k(\phi_a) = \overline{e_k(a)} c_k(\phi)$.
   (b) On note E_ϕ le sev de $\mathcal{C}_{2\pi}$ engendré par les translatées ϕ_a de ϕ quand a décrit $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\psi \in E_\phi$ tel que $N_\infty(f * \phi - \psi) < \varepsilon$.
   (*on pourra approcher* $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\phi(x-t)\,\mathrm{d}t$ *par une somme de Riemann).*
3. On étudie les éléments propres de $f \rightarrow f * \phi$. On considère l'application T_ϕ de $\mathcal{C}_{2\pi}$ dans lui même définie par $T_\phi(f) = f * \phi$. Il s'agit d'un endomorphisme de $\mathcal{C}_{2\pi}$.
   (a) Déterminer les valeurs propres de T_ϕ. Montrer que pour toute valp $\lambda \neq 0$ de T_ϕ, le sous espace propre $E_\lambda(T_\phi)$ associé à λ est de dimension finie et en donner une base.
   (b) On suppose que tous les coeff de Fourier de ϕ sont non nuls. Montrer alors que T_ϕ est injectif et que T_ϕ restreint à $\mathcal{P}$ est un automorphisme de $\mathcal{P}$. En déduire que l'adhérence de E_ϕ est $\mathcal{C}_{2\pi}$.
4. On suppose que E_ϕ est de dimension finie et on note X la partie de $\mathbb{Z}$ constituée des entiers k tels que $c_k(\phi) \neq 0$. Montrer que E_ϕ est le sev de $\mathcal{P}$ engendré par les fonctions e_k quand k décrit X.

5 Une inégalité isopérimétrique.

Soit E un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note $\|.\|$la norme euclidienne de l'espace vectoriel sous jacent.
Soit $\gamma : [0,2\pi] \to E$ un arc de classe C^1, régulier de longueur L et vérifiant:
- (i) la restriction de $\gamma[0,2\pi[$ est injective,
- (ii) $\gamma(2\pi) = \gamma(0)$,
- (iii) $\gamma'(2\pi) = \gamma'(0)$.

On note A l'aire du domaine borné délimité par γ. On veut montrer l'inégalité $L^2 \geq 4\pi A$ et étudier les conditions d'égalité.
On rappelle la formule, obtenue grâce à Green- Riemann, $A = \int_0^{2\pi} \gamma_1(t)\gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t$. γ_1 et γ_2 étant les composantes de γ.

1. Quitte à effectuer le changement de paramètre admissible $\theta : t \to \dfrac{2\pi}{L}\displaystyle\int_0^t \|\gamma'(s)\|\,\mathrm{d}s$, montrer que l'on peut supposer que l'arc paramétré vérifie en outre la condition: - (iv) $\forall t \in [0,2\pi], \|\gamma'(t)\| = \dfrac{L}{2\pi}$.
   Prouver dans ces conditions $\dfrac{L^2}{4\pi^2} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left((\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2\right)\,\mathrm{d}t$
2. On note ψ_1 (resp. ψ_2) la fonction 2π-périodique de classe C^1 à valeurs réelles qui coïncide avec γ_1 (resp. γ_2)sur $[0,2\pi[$.
   (a) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et à valeurs réelles. Montrer que $c_{-k}(f) = \overline{c_k(f)}$
   (b) Etablir les relations suivantes :
   $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|^2\,\mathrm{d}t = 2\lim_n \sum_{k=1}^{n} k^2\left(|c_k(\psi_1)|^2 + |c_k(\psi_2)|^2\right)$$
   $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_1(t)\gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t = -2\lim_n \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{Im}\left(\overline{c_k(\psi_1)}(c_k(\psi_2)\right)$$
   En déduire que $L^2 - 4\pi A = 8\pi^2 \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(k^2\left(|c_k(\psi_1)|^2 + |c_k(\psi_2)|^2\right) + 2k\mathrm{Im}\left(\overline{c_k(\psi_1)}(c_k(\psi_2)\right)\right)$. la série de second membre convergeant absolument.
   (c) Pour tout $k \geq 1$, établir que:
   $$k^2\left(|c_k(\psi_1)|^2 + |c_k(\psi_2|^2\right) + 2k\mathrm{Im}\left(\overline{c_k(\psi_1)}(c_k(\psi_2)\right) = |kc_k(\psi_1) - \mathrm{i}c_k(\psi_2)|^2 + (k^2-1)|c_k(\psi_2)|^2$$
   (d) En déduire l'inégalité annoncée et trouver une CNS sur γ pour que ce soit une égalité.

La paragraphe 1 court et facile, et peut être une partie du paragraphe 2 seront corrigés sur le site au plus tard le lundi précédent la correction du devoir.