Ag.int. 11/06/08 de 16h à 18h. gc.

Partie 1.

Soit $\mathcal{C}$[a,b] l' espace vectoriel des fonctions continues sur [a, b], à valeurs réelles, muni de la norme de la convergence uniforme, c'est à dire : $\|f\| = \sup_{x\in[\mathrm{a,b}]} |f(x|)$.

Soit E le sous espace de $\mathcal{C}$[a,b] des fonctions continues , affines par morceaux sur [a, b].
Ainsi, à tout élément $\phi \in$ E, on peut associer une subdivision σ de [a, b], a= $x_0 < x_1 < ... < x_n$ =b telle que ϕ soit affine sur tout $[x_i, x_{i+1}]$.
1. On note E_σ le sous ensemble de E correspondant à une subdivision fixée σ de [a, b].
Montrer que l'application : $f \in \mathrm{E}_\sigma \to (f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quelle est la dimension de E_σ ?

2. On pose $v_i(x) = |x - x_i|$. Montrer que $v_i \in \mathrm{E}_\sigma$ et que $(v_i)_{i\in[0,n]})$ est une base de E_σ.

3. Soit $f \in \mathcal{C}[a, b]$ et $\sigma_n = (x_i)_{i\in[0,n]})$, $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$. On définit ϕ_n par $\phi_n \in \mathrm{E}_{\sigma_n}$, $\forall i \in [0, n]$, $\phi_n(x_i) = f(x_i)$.
Montrer que ϕ_n converge uniformément vers f sur [a,b].

4. Le sous espace E, $\|.\|$ est il complet ? Est il de dimension finie ?

Partie 2.

On pose $f_n(x) = \dfrac{\int_0^x (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t}{\int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t}$, $g_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Préciser des propriétés des fonctions f_n et g_n sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $0 < x \le 1$. Etablir, pour $0 < x \le t \le 1, t(1-t^2)^n \le (1-t^2)^n \le \dfrac{t}{x}(1-t^2)^n$. En déduire que $f_n(x) \to 1$ quand $n \to +\infty$ et que f_n converge uniformément sur $[\lambda, 1]$ pour tout $\lambda \in]0, 1[$. La convergence est elle uniforme sur]0, 1] ?

3. Montrer que g_n converge uniformément vers $x \to x$ sur [0,1]. (on découpera [0,x] en [0,ε] et [ε, x]).

4.a). Montrer que $x \to |x|$ est limite uniforme d'une suite de polynômes sur [-1, 1].
4.b). Déduire que toute fonction du type (v_i) défini en I est limite uniforme sur [0,1] d'une suite de polynômes.
4.c). Puis que toute fonction continue sur [0,1] vérifie la même propriété.
4.d). Enfin démontrer Weierstass : toute fonction continue sur [a,b] est limite uniforme sur [a,b] d'une suite de polynômes.

Partie 3.

Soit $f \in \mathcal{C}$[0,1]. On définit le polynôme : $B_n(f)(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} C_n^p f(\frac{p}{n})\mathrm{X}^p(1-\mathrm{X})^{n-p}$.

1. Calculer $B_n(1)$.
2. Soit P un polynôme. Montrer que $B_n(\mathrm{X}P) = \dfrac{\mathrm{X}(1-\mathrm{X})}{n}(B_n(P))' + \mathrm{X}B_n(P)$ en remarquant qu'il suffit de montrer cette formule quand $P = \mathrm{X}^k$. *(un peu de calculs...).*

dans la suite on confond polynôme et fonction polynôme.

3. En utilisant 2., montrer par récurrence sur p : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall i \le p$, $(B_n(\mathrm{X}^p))^{(i)}$ cv uniformément vers $(\mathrm{X}^p)^{(i)}$ sur [0,1]. *(encore un peu de calculs...).*
4. En déduire que $\forall Q \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $B_n(Q)$ cv uniformément vers Q sur [0, 1], puis que pour toute $f \in \mathcal{C}$[0,1], $B_n(f)$ cv uniformément vers f sur [0, 1]. On utilisera $\|B_n(f)\| \le \|f\|$, facile à établir.