Feuille de TD 1
Complément sur les anneaux

Polynômes en n indéterminées

Exercice 1 (Fonctions polynomiales)
Soient k un corps infini et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $I_1, \dots, I_n$ des parties infinies de k. Montrer que si $P \in k[X_1, ..., X_n]$ vérifie $P(x_1, ..., x_n) = 0$ pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \prod_{i=1}^n I_i$, alors $P = 0$.
2. Montrer que k^n n'est pas une réunion finie d'hypersurfaces.
3. Soient $A, B \in M_n(k)$ deux matrices de taille n à coefficient dans k. On souhaite montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique. Étant donné $\ell \in \{0, \dots, n-1\}$, on note f_ℓ le coefficient de X^ℓ dans la différence $(\chi_{AB} - \chi_{BA})(X)$, où $A \in M_n(k)$ est fixée. En particulier, f_ℓ est une fonction polynomiale en les coefficients $(b_{i,j})$ de B. On note $F_\ell \in k[X_{ij} : 1 \leq i, j \leq n]$ son polynôme associé.
   (i) Montrer que si B est inversible, alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ et donc $f_\ell = 0$.
   (ii) En déduire la nullité du produit $F_\ell \det \in k[X_{ij} : 1 \leq i, j \leq n]$ pour tout $\ell \in \{0, \dots, n-1\}$, où det est le polynôme obtenu par le calcul du determinant de la matrice $(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
   (iii) Conclure.

Exercice 2 (Cayley-Hamilton par prolongement d'identité)
Soit A un anneau unitaire commutatif et soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrez que pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$, $\chi_M(M) = 0$. On pourra utiliser le fait que les matrices diagonalisables sont denses dans $M_n(\mathbb{C})$.
2. En déduire que pour tout $M \in M_n(A)$, $\chi_M(M) = 0$. On pourra essayer de montrer que $\chi_{\overline{M}}(\overline{M})$ est nul pour $\overline{M}$ une matrice bien choisie à coefficient dans l'algèbre de polynômes $\mathbb{Z}[X_{1,1}, X_{1,2}, \dots, X_{n,n}]$.

Exercice 3 (Non-intégrité des fonctions polynomiales à coefficients dans un corps fini)
Soit k un corps fini de cardinalité q. On admettra que k est l'ensemble des racines du polynôme $X^q - X$.
Soit $\varphi \colon k[X_1, \dots, X_n] \to \mathcal{F}(k^n, k)$ le morphisme associant à un polynôme la fonction polynomiale correspondante.

1. Montrer que $\ker(\varphi) = (X_1^q - X_1, \dots, X_n^q - X_n)$.
2. Montrer que φ est surjective.

Exercice 4
Soit A un anneau commutatif. Montrer que pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$, l'idéal des polynômes de $A[X_1, \dots, X_n]$ qui s'annulent en $(a_1, \dots, a_n)$ est $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$. Cet idéal est-il maximal?

Polynômes symétriques et relations entre les racines et les coefficients

Exercice 5 (Polynômes alternés et symétriques)

1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ tel que pour tout couple (i,j) avec $i < j$ on ait $P(X_1, \dots, X_i, \dots, X_{j-1}, X_i, X_{j+1}, \dots, X_n) = 0$. Montrer que $\prod_{i<j}(X_j - X_i)$ divise P.
2. Soit $P \in \mathbb{Z}[X, Y]$ symétrique tel que $(X - Y)|P$. Montrer que $(X - Y)^2|P$.

Exercice 6 (Polynômes symétriques homogènes)
Soit A un anneau commutatif intègre. Exprimer $\sum_{i \neq j} X_i^2 X_j$ et $\sum_{i<j}(X_i X_j)^2$ dans $A[X_1, \dots, X_n]$ avec $n = 3$ ou $n = 4$, comme polynômes en les polynômes symétriques élémentaires.

Exercice 7
Soit A un anneau commutatif intègre et

$$I = \left\{(i,j,k) \in \{1, 2, \dots, n\}^3 : i \neq j, i \neq k, j \neq k\right\}.$$

Exprimer $\sum_{(i,j,k) \in I} X_i X_j X_k^2$ comme polynôme en les polynômes symétriques élémentaires.

Exercice 8 (Formules de Newton)
Soit A un anneau commutatif intègre de caractéristique plus grande que n. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, on note $S_\ell = \sum_{i=1}^n X_i^\ell$ la ℓ-ème somme de Newton dans $A[X_1, \ldots, X_n]$, et pour $\ell \in \{1, \ldots, n\}$, σ_ℓ le ℓ-ème polynôme symétrique élémentaire en $X_1, \ldots, X_n$. Soit $P(T) = \prod_{i=1}^n (1 - TX_i) \in A[X_1, \ldots, X_n][T]$.

1. Montrer que
$$P(T) = 1 + \sum_{\ell=1}^n (-1)^\ell \sigma_\ell T^\ell \quad \text{et} \quad -T\frac{P'(T)}{P(T)} = \sum_{i=1}^n \frac{TX_i}{1 - TX_i} = \sum_{\ell \in \mathbb{N}^*} S_\ell T^\ell.$$
2. En déduire les *identités de Newton*:
   (i) si $1 \leq \ell \leq n-1$, alors $S_\ell + \sum_{i=1}^{\ell-1} (-1)^i \sigma_i S_{\ell-i} + (-1)^\ell \ell \sigma_\ell = 0$,
   (ii) si $\ell \geq n$, alors $S_\ell + \sum_{i=1}^n (-1)^i \sigma_i S_{\ell-i} = 0$.
3. En déduire que $A[X_1, \ldots, X_n]^{\mathbb{S}_n} = A[S_1, \ldots, S_n]$.
4. On va considérer l'application suivante. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et B ont le même polynôme caractéristique si et seulement si pour tout $\ell \in \{1, \ldots, n\}$, $\operatorname{tr}(A^\ell) = \operatorname{tr}(B^\ell)$.
5. En déduire que A est nilpotente si et seulement si pour tout $\ell \in \{1, \ldots, n\}$, $\operatorname{tr}(A^\ell) = 0$.

Exercice 9 (Discriminant d'une équation cubique)
Soient K un corps et $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 3}$ les racines du polynôme cubique $X^3 + pX + q \in K[X]$. Déterminer en fonction de p et q

1. $\sum_{i=1}^3 \alpha_i^6$,
2. Le discriminant $\Delta = \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$.

Exercice 10 (Orbite et stabilisateur)
Soit A un anneau commutatif intègre et $N \geq 4$ entier. Déterminer l'orbite et le stabilisateur des polynômes suivants dans $A[X_1, \ldots, X_N]$ sous l'action de $\mathbb{S}_N$: X_1X_2, $X_2X_3X_4$, $X_1X_2 + X_3X_4$.

Exercice 11 (Signature d'une permutation)
Soit $n \geq 2$. On rappelle que la *signature* $\epsilon(\sigma)$ de la permutation $\sigma \in \mathbb{S}_n$ est la parité de son nombre d'inversions, *i.e.*
$$\epsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$
On note $\delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_j - X_i) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$.

1. Soit $\sigma \in \mathbb{S}_n$, déterminer $\sigma \cdot \delta$.
2. En déduire que la signature est un morphisme de groupes $\mathbb{S}_n \to \{\pm 1\}$. En particulier, la parité du nombre de transpositions dans toute décomposition de σ donnée ne dépend pas de la décomposition.

Exercice 12 (Opérations sur les entiers algébriques *)
On appelle *entier algébrique* un nombre complexe qui est racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers. On note $\mathbb{A}$ l'ensemble des entiers algébriques, on va montrer dans cet exercice que c'est un anneau.

1. Montrer que $\mathbb{Q} \cap \mathbb{A} = \mathbb{Z}$.
2. Soient $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ deux polynômes unitaires de degré n et m respectivement et de racines complexes $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_j)_{1 \leq j \leq m}$. On pose
$$S = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (X - a_i - b_j) \quad \text{et} \quad T = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (X - a_i b_j).$$
   Montrer que le polynôme symétrique
$$\tilde{S}(B_1, \ldots, B_m) = \prod_{j=1}^m P(X - B_j)$$
   est à coefficients dans $\mathbb{Z}[X]$. En déduire que $S \in \mathbb{Z}[X]$.
3. Soit $\tilde{P} \in \mathbb{Z}[X, Y]$ l'homogénéisé de P. Montrer que $T = \prod_{j=1}^m \tilde{P}(X, b_j)$. Avec un raisonnement similaire à celui de la question précédente, montrer que $T \in \mathbb{Z}[X]$.
4. En déduire que $\mathbb{A}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
5. Déterminer un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}[X]$ dont $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ est racine.