L3A Mathématiques — Université Grenoble Alpes
2020-2021

TD 5

Exercice 1 **(I)** Soit (E,d) un espace métrique et A une partie compacte de E.

1) Montrer que pour tout $x \in E$, $d(x,A)$ est atteinte.

2) Soit B un fermé tel que $A \cap B = \emptyset$, montrer que $d(A,B) > 0$ où $d(A,B) = \inf_{(a,b)\in A\times B} d(a,b)$. Donner un contre-exemple lorsque A est seulement supposé fermé.

Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$ (on pourra considérer $\{x \in E \mid d(x,A) < \varepsilon\}$). Ceci reste-t-il vrai pour A fermé quelconque ?

3) Soit B un compact, montrer qu'il existe $(a,b) \in A \times B$ tel que $d(A,B) = d(a,b)$.

Exercice 2 Soit A une partie fermée et non bornée de $\mathbb{R}^n$ muni de la distance usuelle. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, $(x \in A)$.

1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\{x \mid x \in A \text{ et } f(x) \le k\}$ est compact.

2) Montrer que $f_{|A}$ est minorée et qu'il existe $a \in A$ tel que $\inf f(A) = f(a)$.

3) Utiliser ce résultat pour montrer que les questions 1) et 3) de l'exercice 1 restent vraies si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}^n$ telles que A soit fermée et B compacte.

Exercice 3 **(I)** Les espaces suivants sont-ils compacts ? On prendra la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^n$, et la topologie induite sur les parties de $\mathbb{R}^n$ (en particulier idem pour les parties de $M_n(\mathbb{R})$, via l'identification standard $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$). Pour les espaces de fonctions, on prendra la topologie de la convergence uniforme.

1) le disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.
2) la sphère $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\}$.
3) l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0,\ \frac{1}{x+1} \ge y \ge 0\}$.
4) l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0,\ \frac{1}{x+1} \ge y > 0\}$.
5) l'ensemble $\{(x, \sin(1/x)) \mid x \in]0,1]\} \cup \{(0,x) \mid x \in [-1,1]\}$.
6) $GL_n(\mathbb{R})$.
7) le groupe $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de taille n.
8) l'ensemble des matrices symétriques de taille n dont les valeurs propres sont dans $[-1,1]$.
9) à $k \in]0,1[$ fixé, l'ensemble des applications k-lipschitziennes de $[0,1]$ dans $[-1,1]$.
10) l'ensemble des applications lipschitziennes de $[0,1]$ dans $[-1,1]$.

Exercice 4 **(I)** Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique compact. Montrer qu'il n'existe pas de topologie $\mathcal{T}'$ strictement plus fine que $\mathcal{T}$ telle que $(X,\mathcal{T}')$ est encore compact.

Exercice 5 **(I)** Soit (E,d) un espace métrique tel que pour tout $x \in E$ et tout $r \ge 0$ la boule fermée de centre x et de rayon r est compacte.

1) Montrer que X est complet.
2) Montrer que les parties compactes de X sont les sous-ensembles fermés bornés.

Exercice 6 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit A et B deux parties de E.

1) Montrer que si A est compact et B est fermé alors $A+B$ est fermé.
2) Est-ce toujours vrai si on suppose seulement A et B fermés ?

Exercice 7 **(I)** Soit E un espace topologique séparé, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de E. On note l sa limite. Montrer que $\{u_n \in E \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est une partie compacte de E.

Exercice 8 **(I)** Soit (E,d) un espace métrique et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties compactes non vides de E. On pose $K=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

1) Montrer que K est non vide.
2) Montrer que pour tout ouvert U contenant K, il existe $n\geq 0$ tel que $K_n\subset U$. [1]
3) Si (x_n) est une suite de points $x_n\in K_n$ possédant une limite $x=\lim x_n\in E$, alors $x\in K$. [2]

Exercice 9 Soit (E,d) un espace métrique compact (non vide!) et $f:E\to E$ une application continue. On pose $K_n=f^n(E)$ où f^n est l'itérée n-ième de f. Montrer à l'aide de l'exercice 8 que $K=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est non vide et que $f(K)=K$ [pour obtenir l'inclusion $K\subset f(K)$, on observera que tout élément $y\in K$ peut s'écrire $y=f(x_n)$ avec $x_n\in K_n$, et que l'on peut extraire une sous-suite convergente $x_{n_p}\to x\in K$ grâce à 8 3)].

Exercice 10 Soit (E,d) un espace métrique compact.

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un recouvrement fini de E par des boules ouvertes $(B_{n,i})_{1\leq i\leq N(n)}$ de rayon $1/n$. En déduire que E est séparable.

2) Montrer que E est homéomorphe à une partie de $[0,1]^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit. [3]

3) (*Existence de "partitions de l'unité"*) Soient $(B_{n,i})_{1\leq i\leq N(n)}$ les boules construites en 1). Montrer qu'il existe des fonctions continues $u_{n,i}:E\to[0,1]$ telles que $u_{n,i}>0$ sur $B_{n,i}$, $u_{n,i}=0$ sur $\complement B_{n,i}$, et $\sum_{i=0}^{N(n)} u_{n,i}=1$. [4]

4) Si $f:E\to\mathbb{R}$ est continue, montrer (avec les notations de 3)) que $f_n(x)=\sum_{i=1}^{N(n)} f(a_{n,i})\,u_{n,i}(x)$ converge uniformément vers f quand $n\to+\infty$. En déduire que l'espace des fonctions continues $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\ \ \|_\infty$ est séparable. [5]

Exercice 11 (Autour du théorème du point fixe de Picard) Soient (E,d) un espace métrique compact et $f\colon E\to E$ telle que pour tout $x,y\in E$ avec $x\neq y$ on ait $d\left(f(x),f(y)\right)<d(x,y)$.

1) Montrer que f admet un unique point fixe [pour l'existence, on pourra considérer l'inf de la fonction $u(x)=d(x,f(x))$].

2) L'exercice 9) montre que l'intersection $K=\bigcap f^n(E)$ est non vide et telle que $f(K)=K$. Par une considération de diamètre, vérifier que la partie K est réduite à un seul point, et retrouver ainsi le résultat de 1).

3) Le point initial $x_0\in E$ étant fixé, quel est le comportement de $\left(f^n(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $n\to+\infty$?

Exercice 12 Soient $X=[0,1]$, d_0 la métrique usuelle et d une autre métrique pour que l'identité $\mathrm{id}\colon(X,d_0)\to(X,d)$ est continue.

1) Montrer que les $A\in\mathcal{P}(X)$ est compact pour d si et seulement si elle est compact pour d_0.
2) En déduire que d et d_0 sont topologiquement équivalentes.

Exercice 13 **(I)** Soit $l^1(\mathbb{N})=\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\mid\sum_{n\geq 0}|u_n|<\infty\}$, muni de la norme $\|u\|=\sum_{n\geq 0}|u_n|$.

1) Montrer que $A=\prod\limits_{n\geq 0}[0,2^{-n}]$ est une partie compacte de $l^1(\mathbb{R})$. [6]
2) Soit $B=\{(u_n)\in l^1(\mathbb{N});\|u\|=1\}$. Montrer que B n'est pas compact. [7]

---

1. Indication : Considérer la suite de compacts $K_n'=K_n\smallsetminus U$.
2. Indication : Si $x\notin K$, prendre pour U le complémentaire d'une petite boule fermée de centre x.
3. Indication : Si (a_p) est une suite dénombrable dense dans E, considérer $f=(f_p)_{p\in\mathbb{N}}:E\to[0,1]^{\mathbb{N}}$ avec $f_p(x)=\min(d(a_p,x),1)$.
4. Indication : Si $a_{n,i}$ est le centre de $B_{n,i}$, poser $v_{n,i}(x)=\max(0,1/n-d(x,a_{n,i}))$ et $u_{n,i}=v_{n,i}/\sum_i v_{n,i}$.
5. Indication : Observer que $f_n(x)-f(x)=\sum_{i=1}^{N(n)}(f(a_{n,i})-f(x))\,u_{n,i}(x)$.
6. Indication : Si $p\mapsto x_p=(x_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments, extraire pour chaque n des sous-suites convergentes $(x_{p,n})_{p\in S_n}\to a_n\in[0,2^{-n}]$ avec des parties infinies $\mathbb{N}\supset S_0\supset S_1\supset\ldots\supset S_n\supset\ldots$ et utiliser un argument de sous-suite diagonale.
7. Indication : On pourra considérer la suite de $l^1(\mathbb{N}),(e_n)$ où $e_n(k)=1$ si $k=n$ et $e_n(k)=0$ sinon.

Exercice 14 (I) Soit X et Y des espaces métriques, $f : X \to Y$ une application et $G \subset X \times Y$ le graphe de f, c'est-à-dire l'ensemble $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$.

1) Montrer que G est fermé dans $X \times Y$ si et seulement si, pour toute suite (x_n) de X convergente telle que $(f(x_n))$ soit convergente dans Y, on a $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$.

2) Montrer que si f est continue G est fermé dans $X \times Y$.

3) Montrer que si Y est compact et G est fermé dans $X \times Y$, alors f est continue.

Exercice 15 (Ensemble triadique de Cantor) Si A est une partie de $\mathbb{R}$, on note $\frac{2x+A}{3}$ l'image de A par l'homothétie de centre x et de rapport $\frac{1}{3}$. L'ensemble triadique de Cantor $K \subset [0,1]$ est défini par récurrence de la façon suivante :

$$K_0 = [0,1], \quad K_{n+1} = \frac{K_n}{3} \cup \frac{2+K_n}{3} \quad \text{et} K = \bigcap_{n \geq 0} K_n.$$

Ainsi, on découpe $[0,1]$ en trois intervalles égaux et on retire celui du milieu en gardant les bornes. Donc $K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. On réitère le procédé précédent sur chaque segment, chaque segment est coupé en 3 parties égales et la partie centrale est retirée en gardant les bornes.

$$K_2 = [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1].$$

1) Soit $n \geq 1$, montrer que K_n est la réunion de 2^n segments disjoints de la forme $[x_n, x_n + \frac{1}{3^n}]$ où les x_n décrivent l'ensemble $\{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} \mid a_i \in \{0,2\}\}$.

2) Montrer que K est compact non vide, d'intérieur vide.

3) Montrer que tout élément x de K s'écrit de manière unique $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i}$ avec les a_i égaux à 0 où 2. Réciproquement, montrer que si $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i}$ avec les a_i égaux à 0 où 2, alors $x \in K$.

4) Montrer que K est sans point isolé, c'est à dire que pour tout $x \in K$, pour tout $\varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap \ K \setminus \{x\} \ \neq \emptyset$. (On dit que K est parfait).

5) Montrer que les composantes connexes de K sont les singletons (on dit que K est complètement discontinu).

6) Montrer que K n'est pas dénombrable.

7) L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est muni de la topologie suivante : Si $x = (x_n)_{n \geq 0}$ est un élément de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, une base de voisinages ouverts de x est donnée par $V_k(x) = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \text{pour tout } i \leq k, \ y_i = x_i\}$ où k parcourt $\mathbb{N}$. Montrer que cet espace topologique est homéomorphe à K.

Exercice 16 (Compactifié d'Alexandrov) Soit X un espace localement compact et non compact. On pose $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$, et on considère sur $\widehat{X}$ l'ensemble de parties noté $\widehat{\mathcal{O}} \subset \mathcal{P}(\widehat{X})$ formée des ouverts de X et des complémentaires $\complement K \subset \widehat{X}$ de parties compactes de X.

1) Montrer que $\widehat{\mathcal{O}}$ est une topologie sur $\widehat{X}$, que $\widehat{X}$ est compact pour celle-ci, et que X est un ouvert dense dans $\widehat{X}$.

2) Pour tout partie compacte L de X, montrer en exploitant la locale compacité qu'il existe une partie compacte M de X telle que $L \subset M^\circ$.

3) Montrer que ∞ possède un système dénombrable de voisinages si et seulement si X est réunion d'une suite dénombrable de compacts (on dit alors que l'espace localement compact X est "dénombrable à l'infini").

4) Si X est dénombrable à l'infini, montrer qu'il possède une "suite exhaustive" $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compacts, c'est-à-dire des compacts tels que $\bigcup K_n = X$ et $K_n \subset K_{n+1}^\circ$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer réciproquement qu'un espace X possédant une suite exhaustive de compacts est localement compact et dénombrable à l'infini. On suppose désormais que X possède ces propriétés.

5) À l'aide du théorème d'Urysohn, montrer qu'il existe des fonctions continues $f_n : X \to [0,1]$ telles que $f_n = 1$ sur K_n et $f_n = 0$ sur $\complement K_{n+1}$, et aussi qu'il existe une fonction $g : X \to [1, +\infty[$ qui tend vers $+\infty$ à l'infini (on posera $g = 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} (1 - f_n)$).

6) On suppose que (X,d) est un espace métrique localement compact dénombrable à l'infini. Montrer à l'aide de 9.1) que X possède une partie dénombrable dense $\{a_n\}$ et que l'application $f : X \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ telle que $f(x) = (\min(d(x,a_n), 1/g(x)))_{n\in\mathbb{N}}$ s'étend en un homéomorphisme de $\widehat{X}$ sur une partie de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ qui envoie ∞ sur 0. En déduire que $\widehat{X}$ est métrisable.

7) Soit S^n la sphère unité $x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\pi : S^n \smallsetminus \{\sigma\} \to \mathbb{R}^n$ la "projection stéréographique de pôle Sud" $\sigma = (-1, 0, \ldots, 0)$, qui au point $x \in S^n \smallsetminus \{\sigma\}$ associe le point $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $(0, y)$ soit l'intersection de la droite $(\sigma\, x)$ avec l'hyperplan $x_0 = 0$. Calculer explicitement π et π^{-1} en coordonnées, et en déduire que le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^n$ s'identifie à S^n (en envoyant ∞ sur le pôle Sud et 0 sur le pôle Nord $\nu = (1, 0, \ldots, 0)$).
Indication. Écrire $y = (1-t)\sigma + tx$, $t \in \mathbb{R}$, et montrer que $\|y\|^2 = \frac{1-x_0}{1+x_0}$ (d'où $x_0 = \frac{1-\|y\|^2}{1+|y|^2}$).

Exercice 17 (Théorème de d'Alembert-Gauss) Soit $P(z)$ un polynôme non constant à coefficients réels ou complexes. On se propose de montrer que P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

1) En utilisant le fait que $\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$, montrer que $|P|$ atteint son minimum en un point $z_0 \in \mathbb{C}$.

2) Si $P(z_0) \neq 0$, obtenir une contradiction en montrant à l'aide d'un développement de la forme $Q(h) = 1 + ch^m + O(h^{m+1})$, (où $m \geq 1$ et $c \neq 0$) que le polynôme $Q(h) = P(z_0 + h)/P(z_0)$ prend des valeurs $|Q(h)| < 1$ pour certains $h = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ proches de 0.

Nota : cette première preuve historique convaincante publiée en 1814 est due à Jean-Robert Argand, de nationalité suisse, libraire à Paris et mathématicien amateur (!!)).

Exercice 18 Soit K une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne. Soit C l'enveloppe convexe de K, c'est à dire, le plus petit convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant K.

On suppose connu le **théorème de Carathéodory** (qui est vrai même si K n'est pas compact) : C est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls de $n+1$ points de K :

$$\text{pour } k_0 \in K \text{ fixé,} \qquad C = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i k_i \mid k_i \in K,\ \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

1) Montrer que C est compact.

2) Question subsidiaire de géométrie affine : prouver le théorème de Carathéodory.
Indication. Soit $x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i k_i$ avec $N \geq n+2$, $k_i \in K$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$. En observant que les vecteurs $(k_i - k_N)_{1\leq i\leq N-1}$ sont linéairement dépendants, démontrer qu'il existe des coefficients $(\mu_i)_{1\leq i\leq N}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{N} \mu_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{N} \mu_i k_i = 0$. En considérant les variations de la fonction $v(t) = \min_i(\lambda_i + t\mu_i)$, montrer qu'il existe $t \in [0, +\infty[$ tel que $v(t) = 0$, et enfin que x est barycentre à coefficients positifs d'au plus $N-1$ éléments de K.

Exercice 19 (Dilatation d'un compact (CC3 2018)) Soit (E,d) un espace métrique compact et soit $f\colon E \to E$ une application telle que pour tout $x, y \in E$,

$$d\left(f(x), f(y)\right) \geq d(x,y). \tag{P}$$

Soient a et b deux éléments de E. On considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E définie par récurrence par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = f(a_{n-1}) \qquad \text{et} \qquad b_n = f(b_{n-1}).$$

1) Montrer qu'il existe $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(b_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans E.

2) En utilisant la propriété (P) et la définition des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$d\left(a, a_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}\right) < \varepsilon/2 \qquad \text{et} \qquad d\left(b, b_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}\right) < \varepsilon/2.$$

3) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$d(a,b) \leq d(a_1,b_1) \leq d(a,b) + \varepsilon.$$

4) Conclure :
   a) Montrer que f est une isométrie de E.
   b) Montrer que f est un homéomorphisme.

Exercice 20 (Topologie compacte-ouverte) (*) Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques. Soit $\mathcal{C}(X,Y)$ l'ensemble des fonctions continues et on considère $\mathcal{T}$ la topologie appelé **topologie compacte-ouverte** sur $\mathcal{C}(X,Y)$ engendré par les ensembles $U_{K,O} = \{f \in \mathcal{C}(X,Y) \mid f(K) \subset O\}$ avec $U \in \mathcal{T}_Y$ et K une partie compact de X.

1) Montrer que si Y est métrique et X compact, alors la topologie compacte-ouverte coïncide avec la topologie de la convergence uniforme.

2) Montrer que si Y est séparé, alors $\mathcal{C}(X,Y)$ est séparé.

3) On suppose que X est localement compact (X est séparé et chaque point admet un voisinage compact). Montrer que l'application $\mathrm{ev}\colon X \times \mathcal{C}(X,Y) \to Y$ définie par $\mathrm{ev}(x,f) = f(x)$ est continue.