Remise à niveau IESE3

Rémi Molinier

7 septembre 2020

Table des matières

1 Trigonométrie, produits scalaire et vectoriel

1.1 Cercle et fonctions trigonométriques

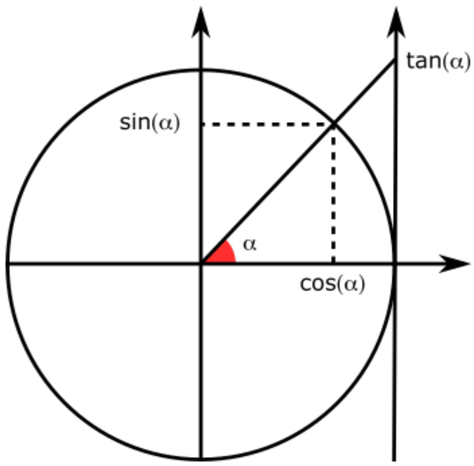

FIGURE 1 – Fonctions trigonométriques

Exercice 1.1. *Remplire le tableau suivant et représentez les sur un cercle trigonométrique.*

Angle α	**cos**(α)	**sin**(α)	**tan**(α)
0			
$\frac{\pi}{6}$			
$\frac{\pi}{4}$			
$\frac{\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{2}$			
$\frac{2\pi}{3}$			
$\frac{3\pi}{4}$			
$\frac{5\pi}{6}$			
π			

Exercice 1.2. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner les liens entre les* cos, sin *et* tan *dans angles suivants et illustrer les sur un cercle trigonométrique.*

1. α *et* $-\alpha$.
2. α *et* $\pi - \alpha$.
3. α *et* $\pi + \alpha$.
4. α *et* $\frac{\pi}{2} - \alpha$.
5. α *et* $\frac{\pi}{2} + \alpha$.

Exercice 1.3 (Formules de trigonométrie)**.** *Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Compléter les formules de trigonométrie suivantes.*

1. $\cos(\alpha + \beta) =$
2. $\sin(\alpha + \beta) =$
3. $\cos(\alpha - \beta) =$
4. $\sin(\alpha - \beta) =$
5. $\cos(2\alpha) =$
6. $\sin(2\alpha) =$
7. $\cos^2(\alpha) =$
8. $\sin^2(\alpha) =$
9. $\cos(\alpha)\cos(\beta) =$
10. $\cos(\alpha)\sin(\beta) =$
11. $\sin(\alpha)\sin(\beta) =$

Exercice 1.4. *Pour chacune des fonctions trigonométriques* cos, sin *et* tan, *Donner le domaine de définition, la parité, la périodicité, la dérivée et tracer l'allure du graphe de la fonction avec les tangentes remarquables.*

1.2 Produit scalaire en dimension 2

Définition 1.1. Soient $u_1 = (x_1, y_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On définit le **produit scalaire** de u_1 et u_2 par

$$u_1 \cdot u_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Exercice 1.5 (Un exemple)**.** *Soient $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (1, -2)$. Calculer le produit scalaire de u_1 et u_2.*

Exercice 1.6 (Propriétés algébriques)**.** *Soient u_1, u_2 et u_3 trois vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *Est-ce $u_1 \cdot u_2 = u_2 \cdot u_1$? (on parle de* ***commutativité****)*
2. *Développer $u_1 \cdot (u_2 + \lambda u_3)$. (on parle de* ***linéarité à droite****)*
3. *Deviner ce qu'on entend par "le produit scalaire est linéaire à gauche".*
4. *Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Le produit scalaire à aussi un interprétation en terme d'angle et de normes :

$$u_1 \cdot u_2 = \|u_1\| \times \|u_2\| \times \cos(\alpha)$$

où $\alpha = (u_1, u_2)$ est l'angle orienté entre u_1 et u_2.

Exercice 1.7 (Interprétation géométrique)**.** *Soient u_1, u_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.*

1. *À quoi correspond géométriquement $\sqrt{u_1 \cdot u_1}$?*
2. *Quel est le liens entre produit scalaire et orthogonalité ?*
3. *Quel est le liens entre produit scalaire et projection ?*

Exercice 1.8 (Un autre exemple)**.** *Soient $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (1, 0)$. Calculer le produit scalaire de u_1 et u_2 de deux façons différentes.*

Exercice 1.9 (Produit scalaires et droites)**.** *Soient $\mathcal{D}$ la droite d'équation $3x + 2y = 0$. Trouver un vecteur unitaire normal à la droite $\mathcal{D}$.*

1.3 Produits scalaire et vectoriel en dimension 3

Définition 1.2. Soient $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On définit le **produit scalaire** de u_1 et u_2 par

$$u_1 \cdot u_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Exercice 1.10 (Un exemple)**.** *Soient $u_1 = (1, 1, -1)$ et $u_2 = (1, -2, 1)$. Calculer le produit scalaire de u_1 et u_2.*

Exercice 1.11 (Propriétés algébriques et interprétation géométrique)**.** *Donner l'interprétation en termes d'angle et de normes et refaire les exercices 1.6 et 1.7 pour la dimension 3.*

Exercice 1.12 (Produit scalaire et plans)**.** *Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x - y + 2z = 0$. Trouver un vecteur unitaire normal à $\mathcal{P}$.*

Définition 1.3. Soient $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On définit le **produit vectoriel** de u_1 et u_2 comme le vecteur de $\mathbb{R}^3$

$$u_1 \wedge u_2 = (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

Exercice 1.13. *Donner un représentation mnémotechnique du calcul du produit vectoriel.* [1]

Exercice 1.14 (Un exemple basique)**.** *Soient $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (0, 1, 0)$. Calculer le produit vectoriel de u_1 et u_2.*

Exercice 1.15 (Un autre exemple)**.** *Soient $u_1 = (1, 1, -1)$ et $u_2 = (1, -2, 1)$. Calculer le produit vectoriel de u_1 et u_2.*

Exercice 1.16 (Propriétés algébriques)**.** *Soient u_1, u_2 et u_3 trois vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *Quel est le liens entre $u_1 \wedge u_2$ et $u_2 \wedge u_1$? (on parle d'**antisymétrie**)*
2. *Développer $u_1 \wedge (u_2 + \lambda u_3)$.*

Exercice 1.17 (Interprétation géométrique)**.** *Soient u_1 et u_2 deux vecteurs.*

1. *Que représente géométriquement le produit vectoriel ?*
2. *Quel est la norme de $u_1 \wedge u_2$ en fonction des normes de u_1 et u_2 ?*

Exercice 1.18 (Produit vectoriel et plans)**.** *Soit $\mathcal{P}$ le plan engendré par les vecteur $(1, 0, 1)$ et $(1, -1, 0)$. Trouver un vecteur unitaire normal à $\mathcal{P}$.*

2 Dérivées et développements limités

2.1 Dérivées

Dans ce cours, nous ne nous intéresserons qu'aux aspects calculatoires des dérivées et leurs interprétations géométriques.

Exercice 2.1. *Rappeler l'interprétation graphique de la dérivée et donner pour une fonction f l'équation de la tangente en x_0 en fonction de x_0, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.*

Exercice 2.2. *Remplir le tableau suivant avec les domaines des fonctions indiquées, leurs dérivées et le domaine de dérivabilité.*

Fonction f	**Domaine $\mathbf{D_f}$**	**Dérivée $\mathbf{f'}$**	**Domaine $\mathbf{D_{f'}}$**
x^n, $n \in \mathbf{N}$			
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$, $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$			
x^α, $\alpha \in]0, +\infty[$			
e^x			
$\ln \lvert x \rvert$			
$\cos x$			
$\sin x$			
$\tan x$			

1. Voir ici par exemple

Exercice 2.3. *Pour les fonctions suivantes, donner l'équation de la tangente au point x_0 indiqué.*

1. $x \mapsto 3x + 2$ *en* $x_0 = 1$.
2. $x \mapsto x^3$ *en* $x_0 = 1$.
3. $\cos$ *en* $x_0 = \pi/2$ *et* $x_0 = \pi/3$.

Exercice 2.4. *Remplir le tableau suivant avec les formules de dérivabilité des composées usuelles ou u et v sont des fonctions dérivables.*

Fonction	**Forme de la dérivée**
$u + v$	
$\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}$	
uv	
$\dfrac{u}{v}$	
$u^n, n \in \mathbb{N}$	
$\cos(u)$	
$\sin(u)$	
$\tan(u)$	
$\ln(u)$	
e^u	

Plus généralement, on a la formule suivante pour les composées de fonctions

$$(u \circ v)' = v' \left(u' \circ v\right) \tag{1}$$

Exercice 2.5 (Application de la formule de composition)**.** *Utiliser la formule* (1) *pour retrouver les formules des dérivées de* u^n, $\cos(u)$, $\sin(u)$, *$tan(u)$*, $\ln(u)$ *et* e^u.

Exercice 2.6. *Quel est la dérivée de la fonction* $x \mapsto e^{e^{e^x}}$

2.2 Études locales des fonctions

2.2.1 Relations de comparaison

Exercice 2.7. *Rappeler les définitions des relations de comparaison o, O et $\sim$.*

Exercice 2.8 (Relations classiques)**.** *Donner les relations de comparaison entre les deux expressions données au voisinage du point indiqué.*

1. $\sin(x)$ *et* x *au voisinage de* 0.
2. $\cos(x)$ *et* $x - \pi/2$ *en* $\pi/2$.
3. x^n *et* x^m *au voisinage de* 0 *(on discutera suivant les valeurs de m et n).*
4. e^x *et* x^n *en* $+\infty$.
5. $\ln(x)$ *et* x^n *en* $+\infty$.

2.2.2 Développements limités

Si f est dérivable en un point x_0, on a

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

ce qui nous permet de comparer f à la fonction polynomiale du premier degré $f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ *au voisinage de* x_0. L'idée sous-jacente est de comparer des fonctions à des fonctions polynomiales. Autrement dit, un développement limité est une "approximation" en un point d'une fonction par une fonction polynomiale.

Définition 2.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$. et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f admet un **développement limité** (DL) à l'ordre n en a s'il existe P un polynôme de degré au plus n et $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in I$

$$f(a + h) = P(h) + (h)^n\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

On peut également écrire :

$$\begin{aligned}
&f(a + h) = P(h) + \mathrm{o}(h^n) \\
&f(x) = P(x - a) + (x - a)^n\varepsilon((x - a))\text{avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0. \\
&f(x) = P(x - a) + \mathrm{o}((x - a)^n)
\end{aligned}$$

Exercice 2.9. *Montrer que pour tout* $n \geq 1$, $(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1}$. *En déduire qu'au voisinage de 0,*

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 \cdots + x^n + o(x^n)$$

L'existence d'un développement limité est une propriété *locale.* L'approximation obtenue est d'autant plus précise que l'ordre du développement est élevé. D'ailleurs celui-ci est unique !

Théorème 2.1 (Taylor-Young)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *I un intervalle de* $\mathbb{R}$, *a dans l'intérieur de I. Soit f une fonction de I dans* $\mathbb{R}$, *n fois dérivable dans I. Alors admet un développement limité d'ordre n donné par*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + o((x - a)^n)$$

Exercice 2.10. *Utiliser la formule de Taylor-Young pour déterminer les développements limités en 0 des fonctions cosinus, sinus, exponentiels et* $x \mapsto (1 + x)^\alpha$ *avec* $\alpha > 0$.

Exercice 2.11. *Calculer le DL des fonctions suivantes*

1. $x \mapsto \dfrac{1 + x}{1 - x}$, *à l'ordre n en 0 ;*
2. $x \mapsto \cos(x)e^x$, *à l'ordre n en 0 ;*

Exercice 2.12. *On veut déterminer un développement limité de la fonction* $x \mapsto \cos(x)$ *au voisinage de* $\pi/3$.

1. *Exprimer* $\cos(\pi/3 + h)$ *en fonction de* $\cos(h)$ *et de* $\sin(h)$.
2. *Effectuer le développement limité en h de l'expression trouvée à la question précédente.*
3. *En déduire le développement limité de* $\cos$ *au voisinage de* $\pi/3$.

Exercice 2.13. *Calculer les limites suivantes :*

$$1. \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \quad 2. \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - \sin x}{x} \quad 3. \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{x^4}.$$

2.2.3 Opérations sur les développement limités

Théorème 2.2 (Intégration de DL). *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, $a \in I$ et $n \geq 0$. Si au voisinage de a f' admet un DL d'ordre n de la forme,*

$$f'(a+h) = P(h) + o(h^n)$$

alors f admet un développement limité d'ordre $n+1$ de la forme

$$f(a+h) = Q(h) + o(h^n)$$

avec Q un polynôme tel que $Q' = P$.

Exercice 2.14. *En utilisant le théorème précédent, donner la formule pour le DL en 0 de $x \mapsto ln(1-x)$ et $x \mapsto ln(1-x)$.*

ATTENTION ! ! On peut intégrer des développement limité mais les choses ne se passe pas forcement bien quand on dérive ! Si f est dérivable et admet un DL d'ordre n en a, rien ne dit (et c'est en général faux) que f' admette un DL d'ordre $n-1$ en a. Autrement dit on+ ne "dérive" pas un développement limité sans prendre de précautions. En fait, on peut dériver des DLs d'ordre $n+1$ **uniquement si l'on sait que la dérivée admet un DL d'ordre n.**

Théorème 2.3 (Composées de DL). *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subseteq J$. On suppose que f admet un DL d'ordre n en $a \in I$ et g admet un DL d'ordre n en $b = f(a)$. Alors $g \circ f$ admet un DL d'ordre n en a obtenue en "composant" les deux DL.*

Exercice 2.15. *Donner le développement limité en 0 de :*

1. $x \mapsto \ln(\cos(x))$, *à l'ordre* 4 ;
2. $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ *à l'ordre* 4 ;
3. $x \mapsto \tan(x)$, *à l'ordre* 4 ;
4. $x \mapsto \sin(\tan(x))$, *à l'ordre* 4 ;
5. $x \mapsto (\ln(1+x))^2$, *à l'ordre* 4 ;
6. $x \mapsto \exp(\sin(x))$, *à l'ordre* 3 ;
7. $x \mapsto \sin^6(x)$, *à l'ordre* 9.

3 Calcul différentiel

On s'intéresse ici à l'étude des fonctions de plusieurs variables

$$f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Où $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$
Quelques cas particuliers :

- Pour $n = 1$ on parle de **champ scalaire**.
- Pour $m = 1$ on parle de **courbe paramétrée**,
- Pour $m = 2$ on parle de **surface paramétrée**,
- Pour $m = n$ on parle de **champ de vecteurs**.

Nous ne regarderons ici que les aspects calculatoires et l'interprétation géométrique. Les aspect plus techniques de continuité et de différentiabilité seront (sûrement) étudié au second semestre.

3.1 Dérivées partiels d'un champ scalaire

Définition 3.1. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $1 \leq i \leq n$. La **dérivée partielle de f par rapport à la $i$ème variable** en $u_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est la dérivée de la fonction $t \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$ en $t = x_i$ et celle-ci est notée $\partial_i f(u_0)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(u_0)$.

Remarque 3.1. La notation peut être adapter en fonction des notations pour les variable. Par exemple si les variables sont (x, y, z, t) avec les trois variables dimensionnelles (x, y, z) et la variable temporelle t, alors on notera plutôt $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ pour les dérivées partielles.

Exercice 3.1. *Calculer toutes les dérivées partielles des fonctions f définies par les expressions suivantes :*

1. $f(x, y, z) = x + 3y - xyz$.
2. $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$.
3. $f(x, y) = y^2 cos(3x)$.

3.2 différentielle et gradient

Quand on étudie une fonction de $f\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, on regarde f coordonnée par coordonnée. Plus précisément, on décompose $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ avec $f_i\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 3.2. La **différentielle** de f en un point u_0 est l'application linéaire

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \dots & \partial_n f_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \\ \partial_1 f_m & \dots & \dots & \partial_n f_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

La matrice de cette application linéaire est la *matrice Jacobienne* de f ; on la note $J_{u_0}(f)$.
Si f est un champ scalaire (i.e. $n = 1$), $J_{u_0}(f)$ s'appelle aussi le gradient de f en u_0 et est noté $\nabla f(u_0)$.

Exercice 3.2. *Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un champs scalaire donner une interprétation géométrique du gradient par rapport à la surface d'équation $z = f(x, y)$.*

Exercice 3.3.

1. *Soit $t \mapsto (x(t), y(t)) := (t - sin(t), 1 - cos(t))$ une courbe paramétré du plan. Quel est la différentielle à la courbe en $t_0 := (\pi/2, \pi/2)$? Quelle est la tangente à la courbe au point M_0 de coordonnées $(x(t_0), y(t_0))$?*
2. *Si $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) := (cos(u)cos(v), cos(v)sin(u), sin(u))$ est une surface de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la différentielle en $(u_0, v_0) := (\pi/3, \pi/3)$? Quelle est l'équation du plan tangente à la surface au point M_0 de coordonnées $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$?*

Théorème 3.1 (Différentiation des fonctions composées)**.** *Soient f une application de $U \subset \mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et g une application de $V \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Si $f(U) \subset V$ alors la matrice jacobienne de $g \circ f$ en u_0 est le produit $J_{f(u_0)} g J_{u_0} f$ des matrices Jacobiennes de f en u_0 et de g en $f(u_0)$.*

Exercice 3.4 (changement de variables)**.** *Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et soient $x\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $y\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.*

1. *Exprimer les dérivées partielles du champ scalaire $(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$ en fonction des dérivées partiels de f et des dérivées partiels de u et v.*
2. *Que devienne les formule si $x(u, v) = u\cos(v)$ et $y(u, v) = u\sin(v)$? (on parle de passage en **coordonnées polaires**)*

Exercice 3.5. *Faire de même que pour l'exercice précédent pour un champ scalaire de $\mathbb{R}^3$ et en appliquant cela au passage en coordonnées cylindriques et sphériques.*