L3 Mathématiques
Parcours A 2019–2020

Contrôle Continu n°3

Durée : 1h45
Documents, téléphones et appareils électroniques interdits

Exercice 1 (Question de cours)
Soient X et Y deux espaces topologiques séparés.

1. À quelle condition X est-il compact ?
2. Soit $f : X \to Y$ une application continue. Montrer que si X est compact alors $f(X)$ est compact.

Exercice 2 (Compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^n$)
Soit $\mathcal{T}$ la topologie standard sur $\mathbb{R}^n$, et définissons l'ensemble $X = \mathbb{R}^n \sqcup \{\infty\}$. Le but de cet exercice est d'introduire une topologie $\mathcal{T}_\infty$ sur X qui étend la topologie $\mathcal{T}$ et telle que $(X, \mathcal{T}_\infty)$ soit compact. Pour définir $\mathcal{T}_\infty$, on déclare que $U \subset X$ est ouvert si et seulement si :

— soit $\infty \notin U$ et $U \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert pour $\mathcal{T}$;
— soit $\infty \in U$ et $\mathbb{R}^n \setminus U$ est compact pour $\mathcal{T}$.

1. Montrer que cette définition donne une topologie sur X.
2. Montrer que la topologie induite sur $\mathbb{R}^n$ coïncide avec $\mathcal{T}$.
3. Montrer que $(X, \mathcal{T}_\infty)$ est séparé.
4. Soit $\{U_i : i \in I\}$ une famille d'ouverts pour $\mathcal{T}_\infty$ qui recouvre X et supposons $\infty \in U_{i_0}$. Montrer que $\{U_i \cap \mathbb{R}^n : i \in I, i \neq i_0\}$ est une famille d'ouverts pour $\mathcal{T}$ qui recouvre $\mathbb{R}^n \setminus U_{i_0}$.
5. En déduire que $(X, \mathcal{T}_\infty)$ est compacte.

Nous allons maintenant montrer que la topologie $\mathcal{T}_\infty$ est unique avec ces propriétés. Considérons donc une topologie $\mathcal{T}'$ sur X telle que $(X, \mathcal{T}')$ soit compacte et telle que la topologie induite par $\mathcal{T}'$ sur $\mathbb{R}^n$ coïncide avec $\mathcal{T}$.

6. Montrer que $U \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert pour $\mathcal{T}'$ si et seulement si U est ouvert pour $\mathcal{T}$.
7. Soit maintenant U un ouvert pour $\mathcal{T}'$ qui contient ∞, et soient $U_i \subset \mathbb{R}^n$ ouverts, pour $i \in I$. Observer que la famille $\{U\} \cup \{U_i : i \in I\}$ recouvre X si et seulement si la famille $\{U_i : i \in I\}$ recouvre $\mathbb{R}^n \setminus U$.
8. En deduire qu'une partie U de X contenant ∞ est ouverte si et seulement si $\mathbb{R}^n \setminus U$ est compact.
9. Conclure que $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}_\infty$ coïncident.

En utilisant les points précédents, répondre aux questions suivantes :

10. Montrer que si $n = 1$, le compactifié X de $\mathbb{R}$ est homéomorphe à S^1.
11. Pour n général, à quel espace topologique est homéomorphe le compactifié de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 3 (Compact de Banach-Mazur)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Le but de cet exercice est de construire une distance sur

$$\{(X, \|\cdot\|_X) \text{ espace vectoriel normé de dimension } n\}/\sim$$

où $(X, \|\cdot\|_X) \sim (Y, \|\cdot\|_Y)$ s'il existe un isomorphisme isométrique $f : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$. Soit

$$\mathcal{L}(X,Y) = \{L : X \to Y \text{ linéaire}\}\ ,$$

et rappelons que

$$|||L||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

définit une norme sur $\mathcal{L}(X,Y)$.

1. Montrer que pour $L : X \to Y$ et $M : Y \to Z$, $|||M \circ L||| \leq |||M||| \cdot |||L|||$.

Nous définissons alors :

$$\delta((X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)) := \inf\{\log\left(|||L||| \cdot |||L^{-1}|||\right)\ :\ L \in \mathcal{L}(X,Y) \text{ isomorphisme}\}\ .$$

2. Appliquer le point 1 pour montrer que $\delta(X,Y) \geq 0$.
3. Montrer que $\delta(X,Y) = 0$ s'il existe un isomorphisme isométrique entre X et Y.
4. Montrer que δ est symétrique.
5. Montrer que δ satisfait l'inégalité triangulaire.

Il faut maintenant montrer que si $\delta(X,Y) = 0$ alors il existe un isomorphisme isométrique entre X et Y. Montrons d'abord que c'est le cas si la borne inférieure dans la définition de δ est atteinte :

6. Observer que, pour tout $L : X \to Y$ linéaire, et pour $L' = \lambda L$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$,
$$|||L||| \cdot |||L^{-1}||| = |||L'||| \cdot |||(L')^{-1}|||.$$
7. En deduire que, s'il existe $L : X \to Y$ inversible telle que $|||L||| \cdot |||L^{-1}||| = 1$, alors on peut supposer $|||L||| = |||L'||| = 1$.
8. Conclure que, si $\delta(X,Y) = 0$ et la borne inférieure est atteinte, alors il existe un isomorphisme isométrique entre X et Y.

Pour terminer l'exercice, nous allons montrer que la borne inférieure dans la définition de δ est toujours atteinte. Considérons donc une suite L_n telle que $\log(|||L_n||| \cdot |||L_n^{-1}|||)$ converge vers $\delta(X,Y)$.

9. Utiliser le point 6 pour montrer qu'on peut supposer $|||L_n||| = 1$, et en déduire que $|||L_n^{-1}|||$ est bornée.
10. Déduire qu'on peut supposer, quitte à extraire des sous-suites, que L_n et L_n^{-1} convergent dans $\mathcal{L}(X,Y)$. (Indice : $\mathcal{L}(X,Y)$ est de dimension finie.)
11. Conclure que $\delta(X,Y) = 0$ implique que X et Y sont isométriques, et donc que δ induit une distance sur $\{(X, \|\cdot\|_X) \text{ espace vectoriel normé de dimension } n\}/\sim$.