MAT404 - Année universitaire 2016-2017
Mathématiques

Durée : une heure
Aucun document autorisé

Contrôle Continu n$^{\text{o}}$ 2 - 17/03/2017

Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1.
Les fonctions suivantes sont-elles des formes bilinéaires ? Sont-elles symétriques ?

1. $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2 + x_2y_2.$

2. $\phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, \quad \phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = ix_1y_2 + ix_2x_1.$

3. $\phi : C([0,1], \mathbb{C}) \times C([0,1], \mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \quad \phi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(1-x)\,dx.$

Exercice 2.
1. On considère la forme bilinéaire suivante [1]

$$\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_3 + 5x_3y_2.$$

Calculer la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, donner son rang et calculer son noyau.

2. On considère la forme bilinéaire symétrique suivante [2]

$$\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}, \quad \phi(P,Q) = \int_{-1}^1 P(x)Q(-x)\,dx.$$

Déterminer l'orthogonal pour ϕ du sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $W = \mathrm{Vect}(X)$, et en donner une base et la dimension.

Exercice 3.
1. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que M s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice M_1 symétrique et d'une matrice M_2 antisymétrique [3]. *Indication : on pourra écrire* ${}^tM$ *en fonction de* M_1 *et* M_2.

2. Soit $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. Montrer que ϕ s'écrit de façon unique comme somme d'une forme bilinéaire ϕ_1 symmétrique et d'une forme bilinéaire ϕ_2 antisymétrique [4]. On exprimera ϕ_1 et ϕ_2 en fonction de ϕ.

---

1. On admet qu'il s'agit bien d'une forme bilinéaire.
2. On admet qu'il s'agit bien d'une forme bilinéaire symétrique.
3. C'est-à-dire telle que ${}^tM_2 = -M_2$.
4. C'est-à-dire telle que $\phi_2(y,x) = -\phi_2(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.