MAT404 - Année universitaire 2016-2017
Mathématiques

Durée : une heure
Aucun document autorisé

Contrôle Continu n$^{\text{o}}$ 1 - 13/02/2017

Exercice 1.
Pour chaque série ci-dessous, déterminer si elle converge.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(e^{\frac{1}{n}} - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; 2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^{\frac{5}{2}}\left(e^{\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n^2} - 1\right)$; 3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; 4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^3}$;
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)^\beta}{n^\alpha}$ avec $\beta > 0, \alpha > 1$; 6. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)^\beta}{n^\alpha}$ avec $\beta > 0, \alpha < 1$.

Exercice 2.
Pour chaque espace vectoriel V, dire si le sous-ensemble $W \subset V$ est un sous-espace vectoriel. Lorsque c'est le cas, donner une base de W et la dimension de W.

1. $V = \mathbb{R}^3, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \quad x + 2y - 2z = 0. \right\}$;
2. $V = C^1([0,1],\mathbb{R}), \quad W = \left\{ f \in C^1([0,1],\mathbb{R}); \quad f' + f = 0. \right\}$.
3. $V = \mathbb{R}_4[X]; \quad W = \{ P \in \mathbb{R}_4[X]; \quad P(2) = P(1) + 3. \}$.

Exercice 3.
On considère l'équation différentielle (E) : $\theta' + \cos(\theta) - 1 = 0$, avec $\theta \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. L'ensemble des solutions de (E) est-il un sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$?