MAT404 - Année universitaire 2016-2017
Mathématiques

Durée : une heure
Aucun document autorisé

Corrigé du Contrôle Continu n$^{\text{o}}$ 3 - 24/04/2017

Exercice 1.
Trouver les coefficients de Fourier de la fonction de la fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = |x|$. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Corrigé de l'exercice 1. Voir TD.

Réponses sans détails :
On a $b_k(f) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
De plus par calcul on obtient :

$$a_0(f) = \frac{\pi}{2}, \quad a_k(f) = \frac{2}{k^2\pi}\left((-1)^k - 1\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

De la formule de Dirichlet évaluée en $x = 0$ on déduit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

de la formule de Parseval on tire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96},$$

et finalement

$$\begin{aligned} S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^4} \\ &= \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{16} S, \end{aligned}$$

d'où

$$S = \frac{16}{15}\frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 2. Considérons dans $\mathbb{R}^2$ la forme quadratique $q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$.

1. Exprimer Φ, la forme polaire associée à q, et montrer que Φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

2. Appliquer la réduction de Gauss pour q.
3. En déduire la signature et le rang de q.
4. Utiliser la question précédente pour trouver une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$ pour Φ.
5. Donner une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$ pour Φ en appliquant cette fois le procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt.

1. On a d'après l'identité de polarisation

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

   et donc

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 4x_1y_1 + x_1y_2 + y_1x_2 + x_2y_2.$$

   Montrons que Φ définit un produit scalaire.
   On a pour tout $x \in \mathbb{R}^2$

$$\Phi(x,x) = q(x) = 3x_1^2 + (x_1+x_2)^2 \geq 0.$$

   De plus, soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\Phi(x,x) = 0$. Montrons que $x = 0$. On a d'après la formule ci-dessus $x_1 = x_1 + x_2 = 0$, d'où $x_1 = x_2 = 0$ et la conclusion s'ensuit.

2. D'après la question précédente, on a

$$q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 3x_1^2 + (x_1+x_2)^2 = 3L_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)^2 + L_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)^2,$$

   avec $L_1(x) = x_1$ et $L_2(x) = x_1 + x_2$ des formes linéaires indépendantes.

3. On déduit de la question précédente que la signature de q vaut $(2,0)$ et le rang de q vaut 2.

4. On cherche une base (e_1', e_2') qui est Φ-orthogonale. Dans ce but on cherche cette base de sorte que

$$L_1(x)e_1' + L_2(x)e_2' = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

   En prenant $x = e_1$ (le premier vecteur de la base canonique) on trouve

$$e_1' + e_2' = e_1.$$

   Puis avec $x = e_2$ (le deuxième vecteur de la base canonique) on obtient

$$e_2' = e_2.$$

   Finalement,

$$e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Et de plus, la matrice de Φ dans la base e' est

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. On pose déjà
$$e_1' = \frac{e_1}{\sqrt{q(e_1)}} = \frac{e_1}{2}.$$
Puis, on considère
$$\widetilde{e_2} = e_2 - \Phi(e_2, e_1')e_1' = e_2 - \frac{1}{4}\Phi(e_2, e_1)e_1 = e_2 - \frac{1}{4}e_1,$$
d'où
$$\widetilde{e_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix},$$
et de plus $q(\widetilde{e_2}) = \frac{3}{4}$. Finalement, on pose
$$e_2' = \frac{\widetilde{e_2}}{\sqrt{q(\widetilde{e_2})}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}.$$