MAT404 - Année universitaire 2016-2017
Mathématiques

Durée : une heure
Aucun document autorisé

Corrigé du Contrôle Continu n° 2 - 17/03/2017

Exercice 1.
Les fonctions suivantes sont-elles des formes bilinéaires ? Sont-elles symétriques ?

1. $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2 + x_2y_2.$
2. $\phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, \quad \phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = ix_1y_2 + ix_2x_1.$
3. $\phi : C([0,1],\mathbb{C}) \times C([0,1],\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \quad \phi(f,g) = \int_0^1 f(x)g(1-x)\,dx.$

Corrigé de l'Exercice 1. Voir TD.

Exercice 2.
1. On considère la forme bilinéaire suivante [1]

$$\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_3 + 5x_3y_2.$$

Calculer la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, donner son rang et calculer son noyau.

2. On considère la forme bilinéaire symétrique suivante [2]

$$\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}, \quad \phi(P,Q) = \int_{-1}^1 P(x)Q(-x)\,dx.$$

Déterminer l'orthogonal pour ϕ du sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $W = \mathrm{Vect}(X)$, et en donner une base et la dimension.

Corrigé de l'Exercice 2.

1. On trouve par des calculs directs que la matrice M de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On admet qu'il s'agit bien d'une forme bilinéaire.
2. On admet qu'il s'agit bien d'une forme bilinéaire symétrique.

Puisque la troisième colonne est égale à deux fois la première, le rang de M est inférieur ou égal à deux. Et puisque les deux premiers vecteurs sont linéairement indépendants, on en déduit que le rang de M est égal à deux.

Calculons le noyau de M : le vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ appartient au noyau si et seulement si $MX = 0$, soit

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 5x_2 = 0 \end{cases}$$

ce qui aboutit à $X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ainsi Ker$M$ est de dimension un (ce que l'on savait déjà d'après le théorème du rang) et c'est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. On a par définition

$$W^{\perp_\phi} = \{P \in \mathbb{R}_2[X];\ \phi(P, w) = 0, \quad \forall w \in W\}.$$

Puisque $W = \mathrm{Vect}(X)$, on en déduit que $P = a + bX + cX^2$ appartient à $W^{\perp_\phi}$ si et seulement si

$$\int_{-1}^{1} (a + bx + cx^2)(-x)\, dx = 0$$

soit, en utilisant le fait que les intégrales de monômes de degré impair sont nulles :

$$b = 0.$$

Ainsi $P = a + cX^2$ et on conclut que $W^{\perp_\phi} = \mathrm{Vect}(1, X^2)$ est de dimension deux.

Exercice 3.

1. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que M s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice M_1 symétrique et d'une matrice M_2 antisymétrique[3]. *Indication : on pourra écrire* ${}^tM$ *en fonction de* M_1 *et* M_2.

2. Soit $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. Montrer que ϕ s'écrit de façon unique comme somme d'une forme bilinéaire ϕ_1 symmétrique et d'une forme bilinéaire ϕ_2 antisymétrique[4]

Corrigé de l'Exercice 3.

1. Supposons qu'il existe M_1 et M_2 respectivement symétrique et antisymétrique telles que $M = M_1 + M_2$. Alors nécessairement, ${}^tM = {}^t M_1 + {}^t M_2 = M_1 - M_2$. Ainsi, on trouve M_1 et M_2 explicitement en fonction de M :

$$\begin{cases} M_1 = \dfrac{1}{2}(M + {}^t M) \\ M_2 = \dfrac{1}{2}(M - {}^t M). \end{cases}$$

3. C'est-à-dire telle que ${}^tM_2 = -M_2$.
4. C'est-à-dire telle que $\phi_2(y, x) = -\phi_2(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Réciproquement, si M_1 et M_2 sont définies comme ci-dessus, elles sont bien respectivement symétrique et antisymétrique et on a bien $M = M_1 + M_2$. Ce couple convient donc, et c'est l'unique possible.

2. On s'inspire du raisonnement de la question précédente : si $\phi(x, y) = \phi_1(x, y) + \phi_2(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, avec ϕ_1 symétrique et ϕ_2 antisymétrique, alors nécessairement $\phi(y, x) = \phi_1(y, x) + \phi_2(y, x) = \phi_1(x, y) - \phi_2(x, y)$. Ainsi, on trouve

$$\begin{cases} \phi_1(x, y) = \dfrac{1}{2}(\phi(x, y) + \phi(y, x)) \\ \phi_2(x, y) = \dfrac{1}{2}(\phi(x, y) - \phi(y, x)). \end{cases}$$

Réciproquement, si ϕ_1 et ϕ_2 sont définies comme ci-dessus alors le couple (ϕ_1, ϕ_2) convient. C'est donc l'unique possible.

Remarque. On peut aussi passer par les matrices des formes bilinéaires, en remarquant que ϕ est symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si sa matrice dans toute base l'est.