**MAT404 - Année universitaire 2016-2017**
**Mathématiques**

**Durée : une heure**
**Aucun document autorisé**

# Corrigé du Contrôle Continu n$^{\text{o}}$ 1 - 13/02/2017

**Exercice 1.**
Pour chaque série ci-dessous, déterminer si elle converge.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(e^{\frac{1}{n}} - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; 2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^{\frac{5}{2}}\left(e^{\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n^2} - 1\right)$; 3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; 4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^3}$;
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)^\beta}{n^\alpha}$ avec $\beta > 0, \alpha > 1$; 6. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)^\beta}{n^\alpha}$ avec $\beta > 0, \alpha < 1$.

**Corrigé de l'Exercice 1**. **Barême : deux points par question.**

1. Posons $u_n = e^{\frac{1}{n}} - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. On fait un développement limité (DL) de exp à l'ordre un et de cos à l'ordre deux au voisinage de 0 :

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad \text{lorsque } x \to 0, \quad \cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2) \quad \text{lorsque } y \to 0,$$

ainsi en posant $x = \frac{1}{n} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ et $y = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ on obtient

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{3}{2n}.$$

Puisque $u_n$ est de signe constant (positif), on en déduit que $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{3}{2n}$ sont de même nature. D'après le critère de Riemann, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge donc $\sum_{n\geq 1}\frac{3}{2n}$ diverge et finalement $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

2. Posons $u_n = n^{\frac{5}{2}}\left(e^{\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n^2} - 1\right)$. On fait un DL de exp à l'ordre deux au voisinage de 0 en posant $x = \frac{1}{n^2}$ ce qui donne

$$e^{\frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

d'où

$$u_n = \frac{n^{5/2}}{2n^4} + o\left(\frac{n^{5/2}}{n^4}\right) = \frac{1}{2n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

Puisque $u_n$ est de signe constant (positif), on en déduit que $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n^{3/2}}$ sont de même nature. D'après le critère de Riemann, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ converge donc $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n^{3/2}}$ converge et finalement $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

3. Posons $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Nous avons

$$u_n \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}.$$

Puisque $u_n$ est de signe constant (positif), on en déduit que $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ sont de même nature. D'après le critère de Riemann, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

4. Posons $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3}$. Attention, $u_n$ n'est pas de signe constant ($u_n < 0$ si $n$ est impair et $u_n > 0$ si $n$ est pair), donc on ne peut pas utiliser le critère de Riemann. On considère la valeur absolue de $u_n$ :

$$|u_n| \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Puisque $|u_n|$ est de signe constant (positif), on en déduit que $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ sont de même nature. D'après le critère de Riemann, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

5. Posons $u_n = \dfrac{\ln(n)^\beta}{n^\alpha}$. Puisque $\alpha > 1$, il existe un petit nombre $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha - \varepsilon > 1$. On considère $n^{\alpha-\varepsilon}u_n$. Puisque $\varepsilon > 0$, on obtient par croissance comparée :

$$n^{\alpha-\varepsilon}u_n = \frac{\ln(n)^\beta}{n^\varepsilon} \to 0 \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

En particulier, la suite $(n^{\alpha-\varepsilon}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ; il existe $C > 0$ tel que

$$0 \leq n^{\alpha-\varepsilon}u_n \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que

$$0 \leq u_n \leq \frac{C}{n^{\alpha-\varepsilon}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Puisque $\alpha - \varepsilon > 1$, le critère de Riemann assure que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{C}{n^{\alpha-\varepsilon}}$ converge. Puis, par comparaison, on en déduit que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

6. Posons $u_n = \dfrac{\ln(n)^\beta}{n^\alpha}$. Pour tout $n \geq 3$, on a $\ln(n) \geq \ln(3) \geq 1$, et donc puisque $\beta > 0$ on trouve

$$u_n \geq \frac{1}{n^\alpha}, \quad \forall n \geq 3.$$

Or $\alpha < 1$, donc le critère de Riemann assure que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge. Puis, par comparaison, on en déduit que $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

**Exercice 2.**

Pour chaque espace vectoriel $V$, dire si le sous-ensemble $W \subset V$ est un sous-espace vectoriel. Lorsque c'est le cas, donner une base de $W$ et la dimension de $W$.

1. $V = \mathbb{R}^3, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \quad x + 2y - 2z = 0. \right\}.$
2. $V = C^1([0,1],\mathbb{R}), \quad W = \left\{ f \in C^1([0,1],\mathbb{R}); \quad f' + f = 0. \right\}.$
3. $V = \mathbb{R}_4[X]; \quad W = \{P \in \mathbb{R}_4[X]; \quad P(2) = P(1) + 3.\}$

**Corrigé de l'Exercice 2. Barême : quatre points pour questions 1 et 2 (deux points pour montrer que c'est un sous-espace vectoriel, deux pour la base et la dimension), et deux points pour question 3.**

1. Montrons que $W$ est un sous-espace vectoriel de $V$. Il y a deux choses à vérifier.

• Montrons que le vecteur nul de $V$, $0_V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, appartient à $W$. C'est bien le cas puisque $0 + 2 \times 0 - 2 \times 0 = 0$.

• Montrons que $W$ est stable par combinaison linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et

$$w_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

des éléments de $W$. Montrons que le vecteur $\lambda w_1 + w_2$ appartient à $W$. On a

$$\lambda w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 \\ \lambda y_1 + y_2 \\ \lambda z_1 + z_2 \end{pmatrix},$$

avec

$$(\lambda x_1 + x_2) + 2(\lambda y_1 + y_2) - 2(\lambda z_1 + z_2) = \lambda(x_1 + 2y_1 - 2z_1) + (x_2 + 2y_2 - 2z_2) = \lambda \times 0 + 0 = 0$$

puisque $w_1, w_2 \in W$. Donc $\lambda w_1 + w_2 \in W$.

Cherchons une base de $W$. On peut écrire $W$ comme

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 2z - 2y \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

donc $W = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, avec

$$e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque par ailleurs $e_1$ et $e_2$ ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre, ainsi $(e_1, e_2)$ est une base de $W$ qui est donc de dimension deux.

2. Montrons que $W$ est un sous-espace vectoriel de $V$. Il y a deux choses à vérifier.

• Montrons que le vecteur nul de $V$ appartient à $W$. Ici le vecteur nul $0_V$ est la fonction identiquement égale à zéro : $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. On a alors aussi $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, d'où $f'(x) + f(x) = 0$ $x \in [0, 1]$.

• Montrons que $W$ est stable par combinaison linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f_1, f_2$ des éléments de $W$. Montrons que la fonction $\lambda f_1 + f_2$ appartient à $W$. On calcule pour tout $x \in [0, 1]$ :

$$(\lambda f_1 + f_2)'(x) + (\lambda f_1 + f_2)(x) = \lambda(f_1'(x) + f_1(x)) + (f_2'(x) + f_2(x)) = 0.$$

Cherchons maintenant une base de $W$. La fonction $f$ appartient à $W$ si et seulement si $f' + f = 0$ ce qui donne $f(x) = f(0)e^{-x}$ pour tout $x \in [0, 1]$. Ainsi on a $W = \mathrm{Vect}(f_0)$, où $f_0$ désigne la fonction $f_0 : x \mapsto e^{-x}$. Puisque $f_0$ n'est pas identiquement nulle, la famille $(f_0)$ est libre donc est une base de $W$ qui est de dimension un.

3. Montrons que $W$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $V$. Considérons le vecteur nul de $W$ c'est-à-dire le polynôme nul $P = 0_{\mathbb{R}_4[X]}$. On a alors par définition du polynôme nul $P(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, $P(2) = 0$ et $P(1) + 3 = 3$ donc $P(2) \neq P(1) + 3$ donc $P$ n'appartient pas à $W$.

**Exercice 3.**

On considère l'équation différentielle $(E) : \theta' + \cos(\theta) - 1 = 0$, avec $\theta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Est-ce que l'ensemble des solutions de $(E)$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ?

**Corrigé de l'Exercice 3. Barème : deux points.**

- Considérons le vecteur nul de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, à savoir la fonction identiquement égale à zéro : $\theta(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors on a $\theta'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où $\theta'(x) + \cos(\theta(x)) - 1 = 0 + \cos(0) - 1 = 0$. Ainsi le vecteur nul est bien une solution de $(E)$.

- Considérons les fonctions constantes suivantes :

$$\theta_1(x) = 2\pi, \quad \theta_2(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Alors $\theta_1'(x) + \cos(\theta_1(x)) - 1 = 0 + \cos(2\pi) - 1 = 0$ donc $\theta_1$ est solution de $(E)$. Par ailleurs, nous venons de voir que $\theta_2$ est aussi solution. Posons $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\theta = \lambda\theta_1 + \theta_2$. Alors $\theta(x) = \pi$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\theta'(x) + \cos(\theta(x)) - 1 = \cos(\pi) - 1 = -2 \neq 0$. Donc $\theta$ n'appartient pas à l'ensemble des solutions. Ainsi, l'ensemble des solutions de $(E)$ n'est pas stable par combinaison linéaire, et on conclut que ce n'est pas un sous-espace vectoriel.