

# EXISTENCE GLOBALE ET PROPAGATION DES MOMENTS POUR UNE ÉQUATION DE VLASOV-POISSON AVEC UNE CHARGE PONCTUELLE.

EVELYNE MIOT

RÉSUMÉ. Le but de ce texte est de présenter des résultats, en collaboration avec L. Desvillettes et C. Saffirio, à propos de l'existence globale d'une solution pour un système de Vlasov-Poisson avec une charge ponctuelle en dimension trois.

## 1. INTRODUCTION

On présente dans cet exposé un résultat d'existence globale, obtenu dans le travail [6] en collaboration avec L. Desvillettes et C. Saffirio, pour une équation de Vlasov-Poisson en dimension trois. Il s'agit d'un modèle de type champ moyen qui se propose de décrire<sup>1</sup> l'évolution d'un ensemble constitué d'un grand nombre de particules chargées légères de même signe - un nuage d'électrons par exemple - qui interagit avec une particule chargée lourde de charge  $q \in \mathbb{R}$  - proton ou noyau. L'inconnue est un couple  $(f, \xi)$ , où  $f$  est la fonction de distribution des particules légères et  $\xi$  la position de la particule lourde, assimilée à une charge ponctuelle. On a ainsi

$$f = f(t, x, v) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \xi = \xi(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

et le système d'équations considéré s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + (E + F) \cdot \nabla_v f = 0 \\ E(t, x) = \nabla \phi(t, x) \\ \phi = -\frac{1}{|x|} * \rho, \quad \rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv \\ F(t, x) = q \frac{x - \xi(t)}{|x - \xi(t)|^3}, \end{cases} \quad (1)$$

avec

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \eta(t) \\ \dot{\eta}(t) = qE(t, \xi(t)). \end{cases}$$

Les conditions initiales au problème (1) sont

$$(\xi(0), \eta(0)) = (\xi_0, \eta_0), \quad f(0, x, v) = f_0(x, v). \quad (2)$$

En l'absence de charge ponctuelle ( $q = 0$ ), le système (1) se réduit au système de Vlasov-Poisson électrostatique représentant l'évolution d'un ensemble de particules

---

1. La justification rigoureuse de ce modèle est un problème ouvert qui ne sera pas discuté ici.

chargées (un plasma),

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_v f = 0 \\ E(t, x) = \nabla \phi(t, x) \\ \phi = -\frac{1}{|x|} * \rho, \quad \rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv. \end{cases} \quad (3)$$

Il en existe également une version gravitationnelle décrivant la dynamique des galaxies, qui est obtenue en remplaçant le potentiel d'interaction répulsif coulombien  $-1/|x| * \rho$  par le potentiel newtonien attractif  $1/|x| * \rho$ .

Dans tout cet exposé, on se limitera au cas coulombien. On se restreindra en outre à une interaction de nature répulsive entre le nuage de particules légères et la charge ponctuelle, c'est-à-dire que  $q > 0$ ; sans perte de généralité on supposera que  $q = 1$ .

## 2. LES RÉSULTATS

On commence par rappeler quelques résultats importants de la littérature concernant le système de Vlasov-Poisson sans charge ponctuelle (3); on renvoie par exemple à [9, 16] pour des exposés détaillés sur le sujet. L'existence globale de solutions faibles dont l'énergie

$$\mathcal{H}(f(t)) = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f(t, x, v) dx dv + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \phi(t, x) \rho(t, x) dx \leq \mathcal{H}(f_0) < +\infty$$

reste finie pour tout temps a été établie par Arsenev [1] (l'énergie est une quantité formellement conservée au cours du temps). Ukai et Okabe [12] ont ensuite démontré l'existence et l'unicité locale de solutions classiques. L'existence globale de solutions classiques a tout d'abord été obtenue par Bardos et Degond [2] pour des petites données initiales. Puis, Pfaffelmoser [14] d'une part et Lions et Perthame [10] d'autre part ont obtenu simultanément deux théorèmes importants quant à l'existence - et dans certains cas l'unicité - de solutions globales. Celui de Pfaffelmoser (voir aussi les travaux plus récents [18, 20]) assure qu'il existe une unique solution classique globale à support compact en vitesse. En particulier, l'hypothèse sur les vitesses implique immédiatement des bornes uniformes en espace sur la densité macroscopique  $\rho$  et le champ de force  $E$  (voir (6) et (7) ci-après). D'un autre côté, le résultat de Lions et Perthame établit que pour toute donnée initiale  $f_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$  qui a des moments finis en vitesse d'ordre supérieur à 3, c'est-à-dire

$$M_k(f_0) = \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |v|^k f_0(x, v) dx dv < +\infty, \quad k > 3,$$

il existe une solution faible globale telle que

$$\sup_{t \in [0, T]} M_k(f(t)) \leq C(T)$$

soit fini pour tout  $T > 0$ . Notons que lorsque  $k = 2$  et  $f$  est une solution d'énergie finie on a immédiatement la borne  $M_2(f(t)) \leq 2\mathcal{H}(f_0)$ . La solution construite dans [10] est de plus unique lorsque  $f_0$  possède des moments d'ordre  $k > 6$  et satisfait à une hypothèse supplémentaire de non-concentration. Gasser, Jabin et Perthame [8] ont par la suite établi la propagation des moments d'ordre  $k > 2$  sous des hypothèses additionnelles portant sur les moments en espace, et Salort [17] a prouvé l'existence pour des moments d'ordre  $k < 6$ . Finalement, Pallard [13] est parvenu à démontrer la propagation des moments d'ordre  $k > 2$  et à établir que  $C(T)$  est une fonction polynomiale de  $T$ .

Venons-en à présent au cas de l'interaction avec une charge ponctuelle décrite par (1). Ce système a été introduit et étudié en dimension deux par Caprino et Marchioro [4]. En dimension trois, Marchioro, Miot et Pulvirenti [15] ont ensuite établi l'analogie du résultat de Pfaffelmoser, à savoir l'existence et l'unicité d'une solution globale avec densité macroscopique et champ électrique localement uniformément bornés dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ . Cependant ce résultat requiert comme hypothèse cruciale que la densité initiale - en plus d'être à support compact en vitesse - s'annule au voisinage de la charge ponctuelle :

$$f_0(x, v) = 0, \quad \forall (x, v) \in B(\xi_0, R_0) \times \mathbb{R}^3.$$

Étant donnée la nature répulsive de l'interaction, la solution construite vérifie alors nécessairement

$$f(t, x, v) = 0, \quad \forall (x, v) \in B(\xi(t), R(t)) \times \mathbb{R}^3, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (4)$$

pour un  $R(t) > 0$ , ce qui assure que le terme  $F \cdot \nabla_v f$  est (au moins) aussi régulier que  $E \cdot \nabla_v f$  et que les vitesses restent bornées. Afin d'établir cette propriété, [4] et [15] introduisent la notion d'énergie microscopique :

$$h(t, x, v) = \frac{|v - \eta(t)|^2}{2} + \frac{1}{|x - \xi(t)|}.$$

L'intérêt de cette quantité est qu'elle contrôle à la fois les vitesses et la distance entre le support de la densité et la charge ponctuelle. De plus, il s'agit d'une quantité plus stable que les vitesses (voir le Lemme 3). L'enjeu consiste alors à montrer que  $\sup_{\text{supp}(f(t))} h(t)$  est fini pour tout  $t \geq 0$  ce qui entraîne aussitôt (4).

De façon naturelle, l'étape suivante de l'étude de (1), qui fait l'objet des Théorèmes 1 et 2 ci-après, consiste à traiter une classe de densités non nulles au voisinage de la charge ponctuelle. L'énergie microscopique diverge sur le support de telles données et la stratégie précédente échoue. Ces densités peuvent toutefois avoir des moments (en énergie) finis, c'est pourquoi on adopte dans ce contexte le point de vue de Lions et Perthame [10]. Notre résultat principal, qui assure l'existence de solutions propageant les moments en énergie, peut être formulé de la façon suivante.

**Théorème 1.** *Il existe  $0 < \lambda \leq 1$  vérifiant la propriété suivante. Soit  $f_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$  une fonction positive et  $(\xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ . On suppose que*

- (i)  $\mathcal{M}_0 = \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f_0(x, v) dx dv < \lambda$ ;
- (ii) Il existe  $m_0 > 6$  tel que pour tout  $m \leq m_0$

$$H_m(f_0) \equiv \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \left( |v|^2 + \frac{1}{|x - \xi_0|} \right)^{m/2} f_0(x, v) dx dv < +\infty.$$

Alors il existe une solution globale faible  $(f, \xi)$  au système (1)–(2) telle que  $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$  et  $\xi \in C^2(\mathbb{R}_+)$ .

De plus, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et pour tout  $m \leq m_0$  tel que  $m < 7$ ,

$$\iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \left( |v|^2 + \frac{1}{|x - \xi(t)|} \right)^{m/2} f(t, x, v) dx dv \leq C(1+t)^c,$$

où  $C$  et  $c$  dépendent uniquement des quantités  $\|f_0\|_{L^1}$ ,  $\|f_0\|_{L^\infty}$  et  $H_m(f_0)$ ,  $m \leq m_0$ .

*Remarque.* En vertu de (6) et (7) ci-après, la solution construite ci-dessus vérifie en fait  $E \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, L^\infty(\mathbb{R}^3))$ . On peut même vérifier que  $f \in C(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$  pour  $1 \leq p < +\infty$  ce qui implique que  $E$  appartient en fait à  $C(\mathbb{R}_+, C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3))$  pour  $0 < \alpha < 1$  (voir le Corollaire 2 in [10]). Ainsi, l'équation différentielle ordinaire intervenant dans (1) est vérifiée au sens classique.

Si l'on supposait seulement que  $3 < m_0 < 6$  dans le Théorème 1, il se pourrait que  $E$  ne soit pas continu ce qui poserait un problème dans la définition de la trajectoire  $t \mapsto \xi(t)$  pour toute donnée initiale  $\xi_0$ . En revanche, si l'on considère le système de Vlasov–Poisson (1) avec charge ponctuelle fixe, c'est-à-dire l'évolution de la densité sous l'influence d'un champ extérieur stationnaire singulier

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + (E + F_*) \cdot \nabla_v f = 0 \\ E(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x - y}{|x - y|^3} \rho(t, y) dy \\ \rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv \\ F_* = q \frac{x - \xi_*}{|x - \xi_*|^3}, \quad q \geq 0, \end{cases} \quad (5)$$

alors les conditions (i) et (ii) du Théorème 2 ne sont plus nécessaires et le résultat correspondant est le suivant :

**Théorème 2.** Soient  $f_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$  une densité positive et  $\xi_* \in \mathbb{R}^3$  tels qu'il existe  $m_0 > 3$  tel que pour tout  $m \leq m_0$ ,

$$H_m(f_0) \equiv \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \left( |v|^2 + \frac{1}{|x - \xi_*|} \right)^{m/2} f_0(x, v) dx dv < +\infty.$$

Alors il existe une solution faible globale  $(f, \xi)$  au système (5) telle que  $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$ .

De plus, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et pour tout  $m \leq m_0$  tel que  $m < 7$ ,

$$\iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \left( |v|^2 + \frac{1}{|x - \xi_*|} \right)^{m/2} f(t, x, v) dx dv \leq C(1 + t)^c,$$

où  $C$  et  $c$  dépendent uniquement des quantités  $\|f_0\|_{L^1}$ ,  $\|f_0\|_{L^\infty}$  et  $H_m(f_0)$ ,  $m \leq m_0$ .

En particulier, en posant  $q = 0$  dans les théorèmes précédents on retrouve le résultat de propagation des moments établi dans [10], avec de plus une dépendance polynomiale (que l'on peut rendre explicite, voir [6]) ce qui en constitue une amélioration.

Soulignons que même si le Théorème 1 permet de considérer des densités non nulles au voisinage de  $\xi_0$ , elles doivent y décroître dans un certain sens. L'hypothèse  $m_0 > 6$  exclut par exemple les densités macroscopiques qui sont à symétrie sphériques et constantes autour de  $\xi_0$ . Ce type de données initiales est en revanche autorisé dans le cadre du Théorème 2.

On conclut cette introduction par quelques remarques quant à de possibles extensions. La restriction  $m < 7$ , qui n'apparaît qu'à la preuve de la Proposition 8, et l'hypothèse (i) sur  $\mathcal{M}_0$ , qui ne sert qu'à la Proposition 4, sont des limitations purement techniques que nous pensons non nécessaires. D'autre part, il serait naturel d'examiner le cas de  $N$  charges ponctuelles de charges  $q_j > 0, j = 1, \dots, N$ , ce qui donne le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + (E + \sum_{j=1}^N F_j) \cdot \nabla_v f = 0 \\ F_j(t, x) = q_j \frac{x - \xi_j(t)}{|x - \xi_j(t)|^3} \\ \dot{\xi}_j(t) = \eta_j(t) \\ \dot{\eta}_j(t) = q_j E(t, \xi_j(t)) + q_j \sum_{k \neq j} F_k(t, \xi_j(t)). \end{cases}$$

La conservation de l'analogue de l'énergie  $\mathcal{H}(f)$  dans ce contexte exclut la possibilité de collision en temps fini entre les charges ponctuelles, ce qui laisse espérer que l'on puisse adapter le cas d'une seule charge ponctuelle par localisation.

En revanche, la question ouverte de l'unicité semble bien plus difficile à cause de la forte divergence de  $F$  au voisinage de la charge ponctuelle.

Par ailleurs, lorsque  $f_0$  est à symétrie sphérique et satisfait les hypothèses des Théorème 1 avec  $(\xi_0, \eta_0) = (0, 0)$  (resp. Théorème 2 avec  $\xi_* = 0$ ), il serait intéressant de construire une solution globale correspondante pour (1) (resp. (5)) qui préserve la symétrie sphérique de ces données. Pour le cas sans charge, il s'agit de résultats connus qui sont dus à Batt [3] puis Wollman [19].

Enfin, mentionnons la question ouverte de l'existence d'une solution globale pour une interaction attractive, qui est un modèle probablement plus pertinent d'un point de vue physique.

La section suivante est consacrée à une ébauche de preuve du Théorème 1 (le Théorème 2 peut être démontré par des arguments similaires). La démonstration repose de manière importante sur les arguments introduits par Lions et Perthame [10] et les adapte au cadre singulier du système (1)–(2). Les détails complémentaires figurent dans [6].

### 3. IDÉES DE PREUVE POUR LE THÉORÈME 1

**3.1. Moments en vitesses et estimations de potentiel.** Comme on l'a dit dans l'introduction, un contrôle des grandes vitesses, que ce soit ponctuellement (point de vue de Pfaffelmoser) ou en moyenne par le biais des moments (point de vue de Lions et Perthame) se traduit par des estimations supplémentaires sur la densité macroscopique  $\rho$  et le champ électrique  $E$ . En effet, étant donnée une fonction positive  $f \in L^1 \cap L^\infty$  on a, en notant  $\rho_f = \int f dv$  et  $E_f = (x/|x|^3) * \rho_f$  :

$$\|\rho_f\|_{L^{\frac{a+3}{3}}} \leq C(\|f\|_{L^\infty})M_a(f)^{\frac{3}{a+3}}, \quad (6)$$

et, de plus,

$$\text{si } 3 < a < 6 \quad \|E_f\|_{L^q} \leq C(\|f\|_{L^\infty})M_a(f)^{\frac{3}{a+3}}, \quad \forall q \in \left(\frac{3}{2}, \frac{3(3+a)}{6-a}\right), \quad (7)$$

$$\text{si } a > 6 \quad \|E_f\|_{L^\infty} \leq C(\|f\|_{L^\infty})M_a(f)^{\frac{3}{a+3}}.$$

Notons que cela implique en particulier que

$$\|\rho_f\|_{L^{\frac{5}{3}}} \leq C(\|f\|_{L^\infty}, \mathcal{H}(f)), \quad \|E_f\|_{L^p} \leq C(\|f\|_{L^\infty}, \mathcal{H}(f)), \quad \forall p \in \left[\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right]. \quad (8)$$

La preuve de ces inégalités se déduit aisément du fait que pour  $b > a \geq 0$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |v|^a f(x, v) dv \leq C\|f\|_{L^\infty}^{\frac{b-a}{3+b}} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |v|^b f(x, v) dv \right)^{\frac{3+a}{3+b}}, \quad (9)$$

car pour  $R \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |v|^a f(x, v) dv \leq R^{a-b} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^b f(x, v) dv + CR^{3+a}\|f\|_\infty, \quad (10)$$

et il suffit ensuite d'optimiser par rapport à  $R$  pour obtenir (6) (voir aussi la preuve de l'estimation (14) de [10]). L'estimation (7) découle quant à elle de l'inégalité de Sobolev.

**3.2. Suite de solutions régulières.** Soit  $T > 0$ . La stratégie de preuve consiste à obtenir des estimations *a priori* sur les moments en énergie d'une suite de solutions régulières de (1)–(2) sur  $[0, T]$ . Ces solutions sont obtenues par régularisation et troncature du support de la densité initiale au voisinage de la charge et application du résultat de [15]. Une fois ces bornes obtenues il ne reste plus qu'à conclure par compacité, étape que l'on omettra ici. Dans toute la suite,  $(f, \xi)$  désigne donc une solution régulière de (1)–(2) sur  $[0, T]$ , telle que  $f \in C_c^1([0, T] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ ,  $\xi \in C^2([0, T])$  et de plus  $f_0$  est nulle dans un voisinage de  $\xi_0$ . La densité est alors constante le long des courbes caractéristiques :

$$f(t, \mathbf{x}(t, x, v), \mathbf{v}(t, x, v)) = f_0(x, v), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

où pour  $(x, v) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\xi_0\} \times \mathbb{R}^3$ ,  $t \mapsto (\mathbf{x}(t, x, v), \mathbf{v}(t, x, v)) \in C^1(\mathbb{R}_+)$  satisfait

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t, x, v) = \mathbf{v}(t, x, v) \\ \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t, x, v) = E(t, \mathbf{x}(t, x, v)) + \frac{\mathbf{x}(t, x, v) - \xi(t)}{|\mathbf{x}(t, x, v) - \xi(t)|^3}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{v})(0, x, v) = (x, v). \end{cases} \quad (11)$$

En particulier, on a pour tout  $x \neq \xi_0$  et  $v \in \mathbb{R}^3$ ,

$$|\mathbf{x}(t, x, v) - \xi(t)| > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

De plus, puisque  $(x, v) \mapsto (v, (E + F)(x))$  est à divergence nulle, le théorème de Liouville assure que  $(x, v) \mapsto (\mathbf{x}(t, x, v), \mathbf{v}(t, x, v))$  préserve la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . On notera parfois  $(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) = (\mathbf{x}(t, x, v), \mathbf{v}(t, x, v))$ .

Dans la suite,  $C$  désignera une constante dépendant seulement des quantités  $\|f_0\|_{L^1}$ ,  $\|f_0\|_{L^\infty}$ ,  $H_m(f_0)$ ,  $m \leq m_0$ , et  $\mathcal{H}(0)^2$  mais pas de  $T$ , et  $C(a_1, a_2, \dots)$  une constante dépendant de plus des quantités  $a_1, a_2, \dots$ .

**3.3. Premières estimations sur les moments.** Commençons par énumérer quelques propriétés utiles pour la suite, dont les démonstrations figurent dans [10] ou [6].

**Proposition 1.** *Les quantités*

$$\|f(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad \mathcal{M}(t) = \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f(t, x, v) dx dv$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t) &= \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f(t, x, v) dv dx + \frac{1}{2} |\eta(t)|^2 \\ &+ \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\rho(t, x) \rho(t, y)}{|x - y|} dx dy + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(t, x)}{|x - \xi(t)|} dx \end{aligned}$$

sont conservées.

Comme conséquence immédiate de la Proposition 1 et de (8) vient la

**Proposition 2.**

$$\sup_{t \in [0, T]} |\eta(t)| \leq \sqrt{2\mathcal{H}(0)}$$

et

$$\sup_{t \in [0, T]} |\xi(t)| \leq |\xi_0| + \sqrt{2\mathcal{H}(0)} T.$$

De plus,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\rho(t)\|_{L^{5/3}} \leq C, \quad (12)$$

---

2. Cette dernière quantité est définie à la Proposition 1 ci-dessous.

et pour tout  $\frac{3}{2} < r \leq \frac{15}{4}$ ,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|E(t)\|_{L^r} \leq C(r). \quad (13)$$

Introduisons maintenant l'énergie microscopique

$$h(t, x, v) = \frac{|v - \eta(t)|^2}{2} + \frac{1}{|x - \xi(t)|} + \mathcal{H}(0) + (\mathcal{M}_0)^{-1} + 1.$$

D'après la Proposition 2 on a

$$|v| \leq 2\sqrt{h}(t, x, v) \quad \forall (t, x, v) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3. \quad (14)$$

Puis, on introduit les moments en énergie

$$H_k(t) = \sup_{s \in [0, t]} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} h(s, x, v)^{k/2} f(s, x, v) dx dv \geq 1,$$

de sorte que par (14) les moments d'énergie contrôlent les moments en vitesse définis dans [10],

$$M_k(t) = \sup_{s \in [0, t]} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |v|^k f(s, x, v) dx dv \leq 2^k H_k(t). \quad (15)$$

L'inégalité suivante atteste que, comme annoncé plus haut, l'énergie microscopique est une quantité plus stable que les vitesses dans le contexte de la présence de la charge ponctuelle :

**Lemme 3.** *Pour toute courbe caractéristique  $(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) = (\mathbf{x}(t, x, v), \mathbf{v}(t, x, v))$  solution de (11), on a*

$$\left| \frac{d}{dt} \sqrt{h}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) \right| \leq |E(t, \mathbf{x}(t))| + |E(t, \xi(t))|.$$

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer (11) et l'EDO de (1) pour calculer

$$\frac{d}{dt} h(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) = (\mathbf{v}(t) - \eta(t)) \cdot (E(t, \mathbf{x}(t)) - E(t, \xi(t))).$$

□

Le Lemme 3 mène à une première inégalité sur les moments :

**Proposition 3.** *Pour tout  $k \geq 0$  on a*

$$H_k(t) \leq C(k) \left\{ H_k(0) + \left( \int_0^t \left\{ \|E(s)\|_{L^{k+3}} + |E(s, \xi(s))| \right\} ds \right)^{k+3} \right\}.$$

*Démonstration.* Voir en annexe. □

L'hypothèse (i) de petitesse pour  $\mathcal{M}_0$  nous permet d'ores et déjà de contrôler les moyennes de  $|E(s, \xi(s))|$  par un argument viriel :

**Proposition 4.** *On a*

$$\int_0^t |E(s, \xi(s))| ds + \int_0^t \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{f(s, x, v)}{|x - \xi(s)|^2} dx dv ds \leq C(1 + t).$$

*Démonstration.* Voir en annexe. □

*Remarque.* Il s'agit de la seule étape de la preuve du Théorème 1 qui fait appel à l'hypothèse (i).

D'après les Propositions 3 et 4, afin d'obtenir une majoration sur les moments il suffit d'établir que

$$\|E(t)\|_{L^{m+3}} \leq CH_m(t)^{\frac{1}{m+3}-\varepsilon}, \quad 0 \leq m \leq m_0, \quad m < 7 \quad (16)$$

avec  $\varepsilon > 0$ . C'est l'objet des paragraphes qui suivent.

**3.4. Flot presque libre.** Soit  $0 \leq \chi_0 \leq 1$  une fonction de troncature régulière telle que  $\chi_0 = 1$  dans  $B(0, 1)$  et  $\chi_0 = 0$  dans  $B(0, 2)^c$ . Soient  $R > 1$  suffisamment grand (dépendant seulement de  $\|f_0\|_{L^1}$  et  $T$ ) et  $\chi_R(z) = \chi_0(z/R)$ . Décomposons le champ total comme

$$E = E_{\text{int}} + E_{\text{ext}}, \quad F = F_{\text{int}} + F_{\text{ext}},$$

où

$$E_{\text{int}} = \rho * (\chi_R x/|x|^3), \quad F_{\text{int}}(t, x) = F(t, x) \chi_R(x - \xi(t)),$$

de sorte que

$$\|D^\ell(E_{\text{ext}} + F_{\text{ext}})\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{R^{2+\ell}}, \quad \ell \geq 0. \quad (17)$$

De même que dans [10], on écrit l'équation de transport pour la densité en considérant la partie locale du champ  $E + F$  comme un terme source :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + (E_{\text{ext}} + F_{\text{ext}}) \cdot \nabla_v f = -(E_{\text{int}} + F_{\text{int}}) \cdot \nabla_v f. \quad (18)$$

On fixe  $t \in [0, T]$  et on définit le flot  $(s, x, v) \mapsto (X(s), V(s)) = (X, V)(s, x, v)$  qui satisfait pour  $s \in [0, t]$

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} X(s) = -V(s), & X(0) = x, \\ \frac{d}{ds} V(s) = -(E_{\text{ext}} + F_{\text{ext}})(t - s, X(s)), & V(0) = v. \end{cases} \quad (19)$$

Donc  $(X, V)$  dépend également de  $t \in [0, T]$ . Il vérifie  $(X, V)(t) = (Y, W)(t)^{-1}$ , où  $(Y, W)$  est le flot de  $E_{\text{ext}} + F_{\text{ext}}$  défini par  $\dot{Y}(t) = W(t)$ ,  $\dot{W}(t) = (E_{\text{ext}} + F_{\text{ext}})(t, Y(t))$  et  $(Y, W)(0) = (x, v)$ .

Si on avait  $E_{\text{ext}} + F_{\text{ext}} = 0$  alors  $(X, V)$  coïnciderait avec le flot libre  $(X_L, V_L)(s, x, v) = (x - vs, v)$ . En fait, (17) implique qu'il en est proche dans des normes diverses lorsque  $R$  est grand. On peut montrer par exemple que

$$|X(s, x, v) - (x - vs)| \leq \frac{C}{R^2} s^2, \quad \forall (s, x, v) \in [0, t] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad (20)$$

et

$$|V(s, x, v) - v| \leq \frac{C}{R^2} s \quad \forall (s, x, v) \in [0, t] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3. \quad (21)$$

De plus,

$$|\det(D_v X)|^{-1} \leq C s^{-3}. \quad (22)$$

En particulier on en déduit les analogues suivants des estimations (6) et (7) : pour  $(\tau, s) \in [0, t]^2$  on a, avec  $\tilde{\rho}(\tau, s, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\tau, X(s, x, v), V(s, x, v)) dv$ ,

$$\|\tilde{\rho}(\tau, s, \cdot)\|_{L^{\frac{a+3}{3}}} \leq C(a) (1+s)^{\frac{3a}{3+a}} \|f_0\|_{L^\infty}^{\frac{a}{3+a}} H_a(\tau)^{\frac{3}{3+a}}.$$

Soit de plus  $\tilde{E}(\tau, s, \cdot) = \tilde{\rho}(\tau, s, \cdot) * (x/|x|^3)$ . Si  $0 < m < 6$ , on a

$$\|\tilde{E}(\tau, s)\|_{L^{\frac{3(m+3)}{6-m}}} \leq C (1+s)^{\frac{3m}{3+m}} H_m(\tau)^{\frac{3}{m+3}}, \quad (23)$$

et si  $m > 6$ ,

$$\|\tilde{E}(\tau, s)\|_{L^\infty} \leq C(m) (1+s)^{\frac{3m}{3+m}} H_m(\tau)^{\frac{3}{m+3}}. \quad (24)$$

**3.5. Formule de Duhamel.** D'après la formule de Duhamel on peut alors exprimer la solution de (18) sous la forme

$$f(t, x, v) = f_0(X(t, x, v), V(t, x, v)) - \int_0^t (\operatorname{div}_v[(E_{\text{int}} + F_{\text{int}})f])(t-s, X(s, x, v), V(s, x, v)) ds. \quad (25)$$

Ceci permet d'obtenir la

**Proposition 5.** *Pour tout  $3 \leq m < m_0$ ,*

$$\|E(t)\|_{L^{m+3}} \leq C(1+T)^c + C \left\| \int_0^t s \int_{\mathbb{R}^3} (|E_{\text{int}} + F_{\text{int}}|f)(t-s, X(s), V(s)) dv ds \right\|_{L^{m+3}}.$$

*Démonstration.* Par intégration de (25),

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^3} f_0(X(t, x, v), V(t, x, v)) dv \\ &\quad - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (\operatorname{div}_v[(E_{\text{int}} + F_{\text{int}})f])(t-s, X(s, x, v), V(s, x, v)) dv ds \\ &= \rho_1(t, x) + \rho_2(t, x), \end{aligned}$$

Donc

$$E(t, x) = \rho_1(t) * (x/|x|^3) + \rho_2(t) * (x/|x|^3) = E_1(t, x) + E_2(t, x).$$

L'inégalité (23) avec  $\tau = 0$  et  $s = t$  implique immédiatement que pour tout  $3 \leq m < m_0$ , puisque  $H_m(0)$  est fini :

$$\sup_{t \in [0, T]} \|E_1(t)\|_{L^{\frac{3(m+3)}{6-m}}} \leq C(1+T)^{\frac{3m}{3+m}}.$$

Afin de traiter  $E_2$  supposons pour simplifier la présentation que le flot  $(X, V)$  est égal au flot libre  $(X_L, V_L)$  :

$$\begin{aligned} \rho_2(t, x) &= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (\operatorname{div}_v[(E_{\text{int}} + F_{\text{int}})f])(t-s, x - vs, v) dv ds \\ &= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}_v [(E_{\text{int}} + F_{\text{int}})f](t-s, x - vs, v) dv ds \\ &\quad - \int_0^t s \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}_x [(E_{\text{int}} + F_{\text{int}})f](t-s, x - vs, v) dv ds. \end{aligned}$$

Puisque  $E_2(t) = 4\pi \nabla \Delta^{-1} \rho_2(t)$  on trouve immédiatement

$$\|E_2(t)\|_{L^{m+3}} \leq C \left\| \int_0^t s \int_{\mathbb{R}^3} (|E_{\text{int}} + F_{\text{int}}|f)(t-s, x - vs, v) dv ds \right\|_{L^{m+3}}.$$

Enfin, comme  $(X, V)$  se comporte comme  $(X_L, V_L)$  pour  $R$  assez grand, on peut en fait arriver de même à la conclusion de la Proposition 5.  $\square$

**3.6. Mélanges de phases.** L'étape suivante consiste à majorer le terme de Duhamel de la Proposition 5. On adapte pour cela les inégalités établies dans [10], qui reposent notamment sur des mélanges (d'intégration) dans l'espace des phases via le changement de variable (38) en annexe. Ce processus de mélange se traduit par un effet de dispersion que l'on peut exploiter grâce aux moyennes temporelles. On obtient de la sorte la

**Proposition 6.** Soient  $t \in [0, \min(1, T)]$ ,  $m \geq 3$  et  $0 < \gamma < 1$ . Alors

$$\left\| \int_0^t s \int_{\mathbb{R}^3} (|E_{\text{int}} + F_{\text{int}}| f)(t-s, X(s), V(s)) dv ds \right\|_{L^{m+3}} \leq C(\gamma, m) t^\delta H_k(t)^{\frac{1}{m+3}},$$

où  $k > m$  est défini par  $k+3 = (m+3)(1+\gamma)$ , et  $0 < \delta < 1$  par  $\delta = \gamma/(1 + (\gamma+1)(m+3))$ .

*Démonstration.* Voir en annexe.  $\square$

*Remarque.* On peut choisir  $k > m$  aussi proche que possible de  $m$  donc l'estimation  $\|E(t)\|_{L^{m+3}} \leq CH_m(t)^{1/(m+3)}$  est presque atteinte.

Dans un second temps, on se ramène à une estimation faisant intervenir le moment souhaité c'est-à-dire  $H_m(t)$ , au prix toutefois d'un exposant plus élevé que dans la Proposition 6.

**Proposition 7.** Soient  $t \in [0, \min(1, T)]$  et  $3 < m < m_0$ , on a si  $\gamma$  est assez petit

$$\begin{aligned} \|E(t)\|_{m+3} &\leq C + C \left\| \int_0^t s \int_{\mathbb{R}^3} (|E_{\text{int}} + F_{\text{int}}| f)(t-s, X(s), V(s)) dv ds \right\|_{L^{m+3}} \\ &\leq C + C(k)t^{1+\gamma+\delta} H_m(t)^{\frac{3(k+3)}{(m+3)^2}}. \end{aligned}$$

*Remarque.* Lorsque  $t$  est petit l'estimation ci-dessus s'avère meilleure que l'estimation (33) de [10] car elle fait apparaître une puissance supplémentaire en  $t$ .

*Démonstration.* D'après les Propositions 5 et 6, on a puisque  $t \leq 1$

$$\begin{aligned} \|E(t)\|_{L^{m+3}} &\leq C + C \left\| \int_0^t s \int_{\mathbb{R}^3} (|E_{\text{int}} + F_{\text{int}}| f)(t-s, X(s), V(s)) dv ds \right\|_{L^{m+3}} \quad (26) \\ &\leq C + Ct^\delta H_k(t)^{\frac{1}{m+3}}, \end{aligned}$$

et d'un autre côté on déduit des Propositions 3 et 4 que

$$H_k(t)^{\frac{1}{m+3}} \leq C \left( H_k(0)^{\frac{1}{m+3}} + t^{\frac{k+3}{m+3}} \sup_{s \in [0, t]} \|E(s)\|_{L^{k+3}}^{\frac{k+3}{m+3}} + 1 \right).$$

Pour  $\gamma$  assez petit on a  $k < m_0$ , d'où

$$H_k(t)^{\frac{1}{m+3}} \leq C \left( 1 + t^{\frac{k+3}{m+3}} \sup_{s \in [0, t]} \|E(s)\|_{L^{k+3}}^{\frac{k+3}{m+3}} \right). \quad (27)$$

De plus, d'après (23) et (24), on sait que

$$\|E(s)\|_{L^{k+3}} \leq CH_m(s)^{\frac{3}{3+m}}, \quad (28)$$

et l'on conclut en combinant (26), (27) et (28).  $\square$

**3.7. Borne uniforme sur les moments.** On démontre finalement le dernier résultat permettant de conclure la démonstration du Théorème 1.

**Proposition 8.** Pour tout  $0 \leq m \leq m_0$  tel que  $m < 7$ ,

$$H_m(T) \leq C(1+T)^c.$$

*Démonstration.* Comme on l'a vu dans (16), le but est d'obtenir

$$\left\| \int_0^t s \int_{\mathbb{R}^3} (|E_{\text{int}} + F_{\text{int}}| f)(t-s, X(s), V(s)) dv ds \right\|_{L^{m+3}} \leq CH_m(t)^{\frac{1}{m+3}-\varepsilon}$$

pour  $\varepsilon > 0$ . La borne de la Proposition 7 est loin d'être assez fine. Cependant, elle s'avère suffisante pour des temps petits grâce au terme  $t^{1+\gamma+\delta}$  qui y apparaît, alors

que par ailleurs d'autres estimations adéquates peuvent être obtenues pour les temps plus grands.

Plus précisément, soit  $0 < t_0 < \min(1, T)$  assez petit, qui sera déterminé ultérieurement. Pour  $t \in [t_0, T]$ , on écrit grâce à la Proposition 5

$$\begin{aligned} \|E(t)\|_{L^{m+3}} &\leq C(1+T)^c + C \left\| \int_0^{t_0} s \int_{\mathbb{R}^3} (|E_{\text{int}} + F_{\text{int}}| f)(t-s, X(s), V(s)) dv ds \right\|_{L^{m+3}} \\ &\quad + C \left\| \int_{t_0}^t s \int_{\mathbb{R}^3} (|E_{\text{int}} + F_{\text{int}}| f)(t-s, X(s), V(s)) dv ds \right\|_{L^{m+3}} \end{aligned}$$

et si  $t \in [0, t_0]$

$$\|E(t)\|_{L^{m+3}} \leq C(1+T)^c + C \left\| \int_0^{t_0} s \int_{\mathbb{R}^3} (|E_{\text{int}} + F_{\text{int}}| f)(t-s, X(s), V(s)) dv ds \right\|_{L^{m+3}}.$$

D'une part, pour  $t \in [t_0, T]$  on procède aux mêmes calculs qu'à l'étape 2 de la démonstration de la Proposition 6 (avec  $\varepsilon = 0$  et  $r_2 = 3/2 - \alpha < 3/2$ ) en utilisant le fait que  $E_{\text{int}} + F_{\text{int}} \in L^\infty([0, T], L^{3/2-\alpha}(\mathbb{R}^3))$  ainsi que des arguments d'interpolation. On obtient ainsi pour  $\alpha > 0$  assez petit

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{t_0}^t s \int_{\mathbb{R}^3} (|E_{\text{int}} + F_{\text{int}}| f)(t-s, X(s), V(s)) dv ds \right\|_{L^{m+3}} \\ &\leq C \left( \|E_{\text{int}} + F_{\text{int}}\|_{L^\infty([0, T], L^{3/2-\alpha})} \right) t_0^{-\frac{4\alpha}{3-2\alpha}} H_m(t)^{\frac{1}{m+3} - \frac{4\alpha}{(3-2\alpha)(m-2)}}. \end{aligned} \quad (29)$$

D'autre part, pour  $t \in [0, t_0]$ , on a en vertu de la Proposition 7

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^{t_0} s \int_{\mathbb{R}^3} (|E_{\text{int}} + F_{\text{int}}| f)(t-s, X(s), V(s)) dv ds \right\|_{L^{m+3}} \\ &\leq C \left( 1 + t_0^{1+\gamma+\delta} H_m(t_0)^{\frac{3(k+3)}{(m+3)^2}} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

On déduit alors de (29) et (30) que pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \|E(t)\|_{L^{m+3}} &\leq C(1+T)^c + C t_0^{1+\gamma+\delta} H_m(t)^{\frac{3(k+3)}{(m+3)^2}} \\ &\quad + C t_0^{-\frac{4\alpha}{3-2\alpha}} H_m(t)^{\frac{1}{m+3} - \frac{4\alpha}{(3-2\alpha)(m-2)}}. \end{aligned}$$

On optimise finalement  $t_0$  par rapport à  $H_m(t)$ . On obtient de la sorte

$$\|E(t)\|_{L^{m+3}} \leq C(1+T)^c + C H_m(t)^{\frac{1}{m+3} - \varepsilon}$$

pour un certain  $0 < \varepsilon < \frac{1}{m+3}$ , ce qui s'avère possible à la condition que  $m < 7$ .  $\square$

## 4. ANNEXE

### 4.1. Démonstration de la Proposition 3.

*Démonstration.* Puisque  $f$  est une solution classique on peut calculer

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} [h^{k/2} f](t, x, v) dx dv \\ &= \frac{k}{2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} [h^{k/2-1} f](v - \eta(t)) \cdot (E(t, x) - E(t, \xi(t))) dx dv \\ &\leq C(k) \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |E(t, x)| [h^{(k-1)/2} f](t, x, v) dx dv \\ &\quad + C(k) |E(t, \xi)| \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} [h^{(k-1)/2} f](t, x, v) dx dv. \end{aligned} \quad (31)$$

On suppose ici que  $k \geq 1$ , le cas  $0 \leq k < 1$  pouvant être traité plus aisément. Pour estimer le premier terme du membre de droite de (31), on va utiliser des arguments d'interpolation similaires à ceux de [10]. D'après l'inégalité de Hölder,

$$\iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |E(t, x)| [h^{(k-1)/2} f](t, x, v) dx dv \leq \|E(t)\|_{L^{k+3}} \left\| \int_{\mathbb{R}^3} [h^{(k-1)/2} f](t, \cdot, v) dv \right\|_{L^{\frac{k+3}{k+2}}}.$$

Puis, pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$  et  $R > 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} [h^{(k-1)/2} f](t, x, v) dv &= \int_{h^{1/2} \leq R} [h^{(k-1)/2} f](t, x, v) dv + \int_{h^{1/2} \geq R} [h^{(k-1)/2} f](t, x, v) dv \\ &\leq R^{k-1} \int_{|v| \leq CR} f(t, x, v) dv + R^{-1} \int_{h^{1/2} \geq R} [h^{k/2} f](t, x, v) dv \\ &\leq C \|f(t)\|_{L^\infty} R^{k+2} + R^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} [h^{k/2} f](t, x, v) dv. \end{aligned}$$

En optimisant le choix de  $R$  et en utilisant le fait que  $\|f(t)\|_{L^\infty} = \|f_0\|_{L^\infty}$ , on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^3} [h^{(k-1)/2} f](t, x, v) dv \leq C(k) \left( \int_{\mathbb{R}^3} [h^{k/2} f](t, x, v) dv \right)^{(k+2)/(k+3)},$$

puis

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^3} [h^{(k-1)/2} f](t, \cdot, v) dv \right\|_{L^{\frac{k+3}{k+2}}} \leq C(k) H_k(t)^{(k+2)/(k+3)},$$

et finalement

$$\iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |E(t, x)| [h^{(k-1)/2} f](t, x, v) dx dv \leq C(k) \|E(t)\|_{L^{k+3}} H_k(t)^{(k+2)/(k+3)}. \quad (32)$$

Pour le second terme de (31), on obtient par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} [h^{(k-1)/2} f](t, x, v) dx dv &\leq \mathcal{M}(t)^{1/k} \left( \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} [h^{k/2} f](t, x, v) dx dv \right)^{(k-1)/k} \\ &\leq C(k) H_k(t)^{(k-1)/k}. \end{aligned}$$

Puisque  $(k-1)/k \leq (k+2)/(k+3)$  et  $H_k(t) \geq 1$ , il s'ensuit que

$$|E(t, \xi)| \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} [h^{(k-1)/2} f](t, x, v) dx dv \leq C(k) |E(t, \xi)| H_k(t)^{(k+2)/(k+3)}. \quad (33)$$

Les estimations (32) et (33) nous mènent à la conclusion de la Proposition 3.  $\square$

#### 4.2. Démonstration de la Proposition 4.

*Démonstration.* En utilisant les EDO dans (1) et (11), on calcule

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} |\mathbf{x}(s) - \xi(s)| &= \frac{|\mathbf{v}(s) - \eta(s)|^2}{|\mathbf{v}(s) - \xi(s)|} + \frac{1}{|\mathbf{x}(s) - \xi(s)|^2} \\ &\quad + \frac{(\mathbf{x}(s) - \xi(s)) \cdot (E(s, \mathbf{x}(s)) - E(s, \xi(s)))}{|\mathbf{x}(s) - \xi(s)|} - \frac{[(\mathbf{x}(s) - \xi(s)) \cdot (\mathbf{v}(s) - \eta(s))]^2}{|\mathbf{x}(s) - \xi(s)|^3}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{|\mathbf{x}(s) - \xi(s)|^2} \leq \frac{d^2}{ds^2} |\mathbf{x}(s) - \xi(s)| + |E(s, \mathbf{x}(s))| + |E(s, \xi(s))|. \quad (34)$$

D'un autre côté, on obtient par changement de variable

$$|E(s, \xi(s))| \leq \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{f(s, x, v)}{|x - \xi(s)|^2} dx dv = \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{f_0(x, v)}{|\mathbf{x}(s, x, v) - \xi(s)|^2} dx dv,$$

donc par (34)

$$\begin{aligned} \int_0^t |E(s, \xi(s))| ds &\leq \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f_0(x, v) \left( \int_0^t \frac{d^2}{ds^2} |\mathbf{x}(s) - \xi(s)| ds \right) dx dv \\ &\quad + \int_0^t \left( \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f_0(x, v) |E(s, \mathbf{x}(s, x, v))| dx dv \right) ds + \mathcal{M}_0 \int_0^t |E(s, \xi(s))| ds. \end{aligned} \quad (35)$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f_0(x, v) \left( \int_0^t \frac{d^2}{ds^2} |\mathbf{x}(s) - \xi(s)| ds \right) dx dv \\ &\leq \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f_0(x, v) \left( \left| \frac{d}{ds} |\mathbf{x} - \xi| \right| (t) + \left| \frac{d}{ds} |\mathbf{x} - \xi| \right| (0) \right) dx dv \\ &\leq 2 \sup_{t \in [0, T]} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f_0(x, v) |\mathbf{v}(t, x, v) - \eta(t)| dx dv \\ &= 2 \sup_{t \in [0, T]} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f(t, x, v) |v - \eta(t)| dx dv \\ &\leq C \sup_{t \in [0, T]} \mathcal{M}(t)^{1/2} (\mathcal{H}(t) + \mathcal{H}(t) \mathcal{M}(t))^{1/2} \leq C. \end{aligned} \quad (36)$$

D'autre part, un nouveau changement de variable combiné à (12)-(13) donne

$$\begin{aligned} &\int_0^t \left( \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f_0(x, v) |E(s, \mathbf{x}(s, x, v))| dx dv \right) ds \\ &= \int_0^t \left( \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f(s, x, v) |E(s, x)| dx dv \right) ds \\ &\leq C \int_0^t \|\rho(s)\|_{L^{5/3}} \|E(s)\|_{L^{5/2}} ds \leq Ct. \end{aligned} \quad (37)$$

Par (35), ceci implique que

$$\int_0^t |E(s, \xi(s))| ds \leq C(1+t) + \mathcal{M}_0 \int_0^t |E(s, \xi(s))| ds.$$

On conclut alors grâce au fait que  $\mathcal{M}_0 < 1$  puis en intégrant (34) par rapport à la mesure  $f(0, x, v) dx dv ds$  et en utilisant (36) et (37).  $\square$

### 4.3. Démonstration de la Proposition 6.

*Démonstration. Étape 1 : estimation pour  $E_{\text{int}}$ .* Cette contribution est déjà traitée par les estimations (31)-(32) et (28')-(40) de [10]. Plus précisément, on a pour tout  $3/2 < r_1 \leq 15/4$

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t s \int_{\mathbb{R}^3} (|E_{\text{int}}|f)(t-s, X(s), V(s)) dv ds \right\|_{L^{m+3}} \\ &\leq C(r_1, m) t^{2-\frac{3}{r_1}} \sup_{\tau \in [0, t]} \|E_{\text{int}}(\tau)\|_{L^{r_1}} M_{k_1}(t)^{\frac{1}{m+3}} \\ &\leq C(r_1, m) t^{2-\frac{3}{r_1}} H_{k_1}(t)^{\frac{1}{m+3}}, \end{aligned}$$

où  $k_1 > m$  est défini par  $k_1 + 3 = (m+3)(3-3/r_1)$ . On a utilisé (8) et (15) dans la dernière inégalité.

**Étape 2 : estimation pour  $F_{\text{int}}$ .** On ne peut plus procéder comme ci-dessus. En effet  $F_{\text{int}}$  n'appartient à  $L^r$  qu'à la condition que  $r < 3/2$ , or l'estimation précédente mène à une intégrale en temps divergente lorsque  $2 - 3/r < 0$ . On considère donc

plutôt  $|F_{\text{int}}(X, V)|/|V|^\varepsilon$  pour  $0 < \varepsilon < 1$  choisi de sorte que  $2 - 3/r + \varepsilon > 0$ , voir (39) ci-dessous. En contrepartie, l'indice du moment qui apparaît est un peu plus élevé. Posons

$$I(x) = \int_0^t s \int_{\mathbb{R}^3} (|F_{\text{int}}|f)(t-s, X(s), V(s)) dv ds.$$

• **Estimation locale pour  $I$ .** On considère  $B = B(0, 3R_0)$  avec  $R_0 > R$  assez grand pour que  $\sup_{t \in [0, T]} |\xi(t)| \leq R_0$  (voir la Proposition 2). Soit  $\varepsilon > 0$  un petit paramètre et  $r_2 < 3/2$ . Pour  $x \in B$ ,

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^t s^{1+\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|F_{\text{int}}|(t-s, X(s))}{|X(s)-x|^\varepsilon} \left( \frac{|X(s)-x|}{s} \right)^\varepsilon f(t-s, X(s), V(s)) dv ds \\ &\leq \|f_0\|_{L^\infty}^{1-\frac{1}{r_2}} \int_0^t s^{1+\varepsilon} \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|F_{\text{int}}|^{r_2}(t-s, X(s))}{|X(s)-x|^{\varepsilon r_2}} dv \right)^{\frac{1}{r_2}} \\ &\quad \times \left( \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{|X(s)-x|}{s} \right)^{\varepsilon r_2'} f(t-s, X(s), V(s)) dv \right)^{\frac{1}{r_2}} ds. \end{aligned}$$

À  $x$  fixé, on procède au changement de variable

$$y = x - X(s, x, v) \tag{38}$$

qui satisfait d'après (20)  $|y| \leq s(|v| + 1)$ . De plus d'après (22)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|F_{\text{int}}|^{r_2}(t-s, X(s))}{|X(s)-x|^{\varepsilon r_2}} dv &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|F_{\text{int}}|^{r_2}(t-s, x-y)}{|y|^{\varepsilon r_2}} |\det(D_v X(s))|^{-1} dy \\ &\leq \frac{C}{s^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|F_{\text{int}}|^{r_2}(t-s, x-y)}{|y|^{\varepsilon r_2}} dy, \end{aligned}$$

donc

$$\|I\|_{L^{m+3}(B)} \leq C \int_0^t s^{1-\frac{3}{r_2}+\varepsilon} \|J(s)\|_{L^{m+3}(B)} ds, \tag{39}$$

où

$$\begin{aligned} J(s, x) &= \left( \int_{|x-\xi-y| \leq 2R} \frac{dy}{|y|^{\varepsilon r_2} |x-\xi-y|^{2r_2}} \right)^{\frac{1}{r_2}} \left( \int_{\mathbb{R}^3} (1+|v|^{\varepsilon r_2'}) f(t-s, X(s), V(s)) dv \right)^{\frac{1}{r_2}} \\ &\leq C |x-\xi|^{\frac{3}{r_2}-2-\varepsilon} \left( \int_{\mathbb{R}^3} (1+|v|^{\varepsilon r_2'}) f(t-s, X(s), V(s)) dv \right)^{\frac{1}{r_2}}. \end{aligned}$$

On pose ensuite

$$r_2 = \frac{3}{2 + \varepsilon/2}, \quad p = \frac{2}{\varepsilon(m+3)} > 1$$

de sorte que

$$-\left(\frac{3}{r_2} - 2 - \varepsilon\right)(m+3)p = \frac{\varepsilon}{2}(m+3)p = 1 < 3.$$

D'après l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \|J(s)\|_{L^{m+3}(B)} &\leq C \left( \int_{|x| \leq 3R_0} |x-\xi|^{-\frac{\varepsilon}{2}(m+3)p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^3} \left( \int_{\mathbb{R}^3} (1+|v|^{\varepsilon r_2'}) f(t-s, X(s), V(s)) dv \right)^{\frac{(m+3)p'}{r_2}} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \end{aligned}$$

donc

$$\|I\|_{L^{m+3}(B)} \leq C t^{\frac{\varepsilon}{2}} \sup_{\tau, s \in [0, t]} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \left( \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|^{\varepsilon r'_2}) f(\tau, X(s), V(s)) dv \right)^{\frac{(m+3)p'}{r'_2}} dx \right\}^{\frac{1}{(m+3)p'}}.$$

Cherchons à présent une estimation pour le terme de droite. Soit  $k_2$  tel que

$$\left( \frac{3 + \varepsilon r'_2}{3 + k_2} \right) \left( \frac{m + 3}{r'_2} p' \right) = 1.$$

On rappelle (9) :

$$\int_{\mathbb{R}^3} |v|^a f(\tau, X(s, x, v), V(s, x, v)) dv \leq C \|f_0\|_{L^\infty}^{\frac{b-a}{3+b}} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |v|^b f(\tau, X(s, x, v), V(s, x, v)) dv \right)^{\frac{3+a}{3+b}}.$$

En particulier avec  $a = \varepsilon r'_2$ ,  $b = k_2$ , on a

$$\begin{aligned} & \sup_{\tau, s \in [0, t]} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |v|^{\varepsilon r'_2} f(\tau, X(s), V(s)) dv \right)^{\frac{(m+3)p'}{r'_2}} dx \right\}^{\frac{1}{(m+3)p'}} \\ & \leq C \sup_{\tau, s \in [0, t]} \left\{ \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |v|^{k_2} f(\tau, X(s), V(s)) dx dv \right\}^{\frac{1}{(m+3)p'}}. \end{aligned}$$

On estime

$$\sup_{\tau, s \in [0, t]} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \left( \int_{\mathbb{R}^3} f(\tau, X(s), V(s)) dv \right)^{\frac{(m+3)p'}{r'_2}} dx \right\}^{\frac{1}{(m+3)p'}}$$

par des arguments similaires, et finalement on trouve en utilisant (21)

$$\|I\|_{L^{m+3}(B)} \leq C t^{\frac{\varepsilon}{2}} H_{k_2}(t)^{\frac{1}{(m+3)p'}} \leq C(r_2, m) t^{\frac{3}{r_2} - 2} H_{k_2}(t)^{\frac{1}{m+3}}.$$

• **Estimation pour  $I$  à l'infini.** On procède à des estimations en fait plus directes en remarquant que si  $x \in B^c$  et  $x - y \in \text{supp}(F_{\text{int}}(t - s))$  on a  $|y| \geq 1$ .

### Étape 3 : fin de la preuve de la Proposition 6.

En rassemblant les étapes précédentes on voit que

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t s \int_{\mathbb{R}^3} (|E_{\text{int}} + F_{\text{int}}| f)(t - s, X(s), V(s)) dv ds \right\|_{L^{m+3}} \\ & \leq C(r_1, m) t^{2 - \frac{3}{r_1}} H_{k_1}(t)^{\frac{1}{m+3}} + C(r_2, m) t^{\frac{3}{r_2} - 2} H_{k_2}(t)^{\frac{1}{m+3}}, \end{aligned}$$

avec  $r_1 > 3/2$  et  $r_2 < 3/2$  aussi proches de  $3/2$  que nécessaire. Pour conclure, on fixe  $0 < \gamma < 1$  et l'on détermine  $r_1$  et  $r_2$  en fonction de  $\gamma$  de sorte que  $k_1 = k_2 = k$ , ce qui donne le résultat voulu.  $\square$

## RÉFÉRENCES

- [1] A. A. Arsenov, *Global existence of a weak solution of Vlasov's system of equations*, U. S. S. R. Comput. Math. Math. Phys. **15** (1975), 131–143.
- [2] C. Bardos et P. Degond, *Global existence for the Vlasov-Poisson equation in 3 space variables with small initial data*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **2**, 2 (1985), 101118.
- [3] J. Batt, *Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics*, J. Differential Equations **25** (1977), no. 3, 342–364.
- [4] S. Caprino et C. Marchioro, *On the plasma-charge model*, Kinet. Relat. Models **3** (2) (2010), 241–254.

- [5] F. Castella, *Propagation of space moments in the Vlasov-Poisson Equation and further results*, Ann. Inst. Henri Poincaré **16** (1999), no. 4, 503–533.
- [6] L. Desvillettes, E. Miot et C. Saffirio, *Polynomial propagation of moments and global existence for a Vlasov-Poisson system with a point charge*, preprint.
- [7] R. J. Di Perna et P. L. Lions, *Ordinary differential equations, transport equations and Sobolev spaces*, Inv. Math. **98** (1989), 511–547.
- [8] I. Gasser, P. E. Jabin et B. Perthame, *Regularity and propagation of moments in some nonlinear Vlasov systems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **130** (2000), 1259–1273.
- [9] R. T. Glassey, *The Cauchy problem in kinetic theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1996.
- [10] P. L. Lions et B. Perthame, *Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system*, Invent. Math. **105** (1991), 415–430.
- [11] G. Loeper, *Uniqueness of the solution to the Vlasov-Poisson system with bounded density*, J. Math. Pures Appl. (9) **86** (2006), no. 1, 68–79.
- [12] S. Okabe et T. Ukai, *On classical solutions in the large in time of the two-dimensional Vlasov equation*, Osaka J. Math. **15** (1978), 245–261.
- [13] C. Pallard, *Moment propagation for weak solutions to the Vlasov-Poisson system*, Commun. Partial Differ. Equations **37** (7) (2012), 1273–1285.
- [14] K. Pfaffelmoser, *Global existence of the Vlasov-Poisson system in three dimensions for general initial data*, J. Differ. Equ. **95** (1992), 281–303.
- [15] C. Marchioro, E. Miot et M. Pulvirenti, *The Cauchy problem for the 3D Vlasov-Poisson system with point charges*, Arch. Ration. Mech. Anal. **201** (2011), 1–26.
- [16] G. Rein, *Collisionless kinetic equations from astrophysics—the Vlasov-Poisson system*, Handb. Differ. Equ., Vol. III, 383476, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2007.
- [17] D. Salort, *Transport equations with unbounded force fields and application to the Vlasov-Poisson equation*, Math. Models Methods Appl. Sci. **19** (2) (2009), 199–228.
- [18] J. Schaeffer, *Global existence of smooth solutions to the Vlasov-Poisson system in three dimensions*, Commun. Partial Differ. Equations **16** (8–9) (1991), 1313–1335.
- [19] S. Wollman, *The spherically symmetric Vlasov-Poisson system*, J. Differential Equations **35** (1980), no. 1, 30–35.
- [20] S. Wollman, *Global in time solution to the three-dimensional Vlasov-Poisson system*, J. Math. Anal. Appl. **176** (1) (1996), 76–91.

(E. Miot) UNIVERSITÉ PARIS-SUD, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, BÂTIMENT 425, 91405 ORSAY

*E-mail address:* evelyne.miot@math.u-psud.fr