Université Joseph Fourier, Grenoble I
Mathématiques, Informatique et Mathématiques Appliquées
Licence Sciences et Technologies 1e année

Systèmes linéaires

Bernard Ycart

Si vous savez déjà résoudre un système linéaire par la méthode de Gauss, vous n'apprendrez pas grand chose de neuf dans ce chapitre. Il est essentiellement technique, et ne présente aucune difficulté théorique. Il vous préparera àux chapitres suivants d'algèbre linéaire, et vous devez l'avoir bien assimilé avant de continuer.

Table des matières

1 Cours

1.1 Intersection de droites et de plans

Une équation linéaire à deux inconnues, du type $a_1x + a_2y = b$, est l'équation d'une droite dans le plan. Plus précisément, si a_1, a_2 et b sont des réels fixés, tels que $a_1 \neq 0$ ou $a_2 \neq 0$, l'ensemble des couples (x, y) vérifiant $a_1x + a_2y = b$ est une droite affine. Chercher les couples (x, y) qui vérifient plusieurs équations du même type, c'est chercher les points communs à plusieurs droites affines. Voici trois exemples de systèmes de 3 équations à 2 inconnues.

$$\left\{\begin{array}{rrcr} x & -y & = & -1 \\ x & +y & = & 1 \\ & y & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrcr} x & -y & = & -1 \\ x & +y & = & 1 \\ & y & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrcr} x & -y & = & -1 \\ 2x & -2y & = & -2 \\ -x & +y & = & 1 \end{array}\right.$$

Le premier n'a pas de solution. Le second a une solution unique : la solution de ses deux premières équations vérifie la troisième. Le troisième système a une infinité de solutions : ses trois équations sont équivalentes.

La figure 1 donne une interprétation géométrique des trois systèmes. Dans chacun des trois graphiques, D_1, D_2, D_3 sont les droites correspondant aux trois équations du système. Résoudre un système de m équations à 2 inconnues, c'est déterminer

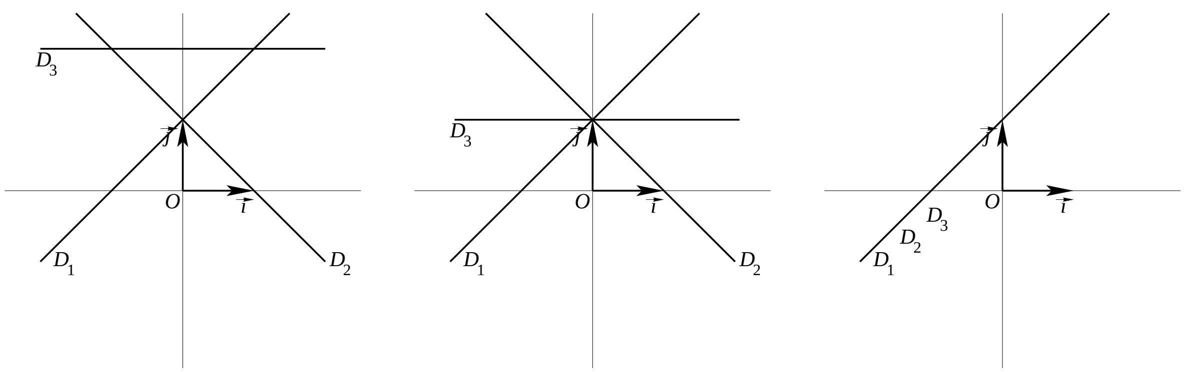


FIG. 1 – Interprétations géométriques de 3 systèmes linéaires de 3 équations à 2 inconnues.

l'intersection de m droites dans le plan. Elle peut être vide, réduite à un point, ou égale à une droite.

Une équation linéaire à trois inconnues x, y, z est l'équation d'un plan dans l'espace. Voici trois systèmes de deux équations à trois inconnues.

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 1 \\ -x & -y & -z & = & -1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 1 \\ -x & -y & -z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 1 \\ x & -y & +z & = & -1 \end{array}\right.$$

Les deux équations du premier système représentent le même plan. L'ensemble des solutions du système est ce plan. Dans le second système, les équations sont celles de deux plans parallèles : leur intersection est vide. Le troisième système est le cas général : l'intersection des deux plans est une droite. Les trois cas sont illustrés par la figure 2.

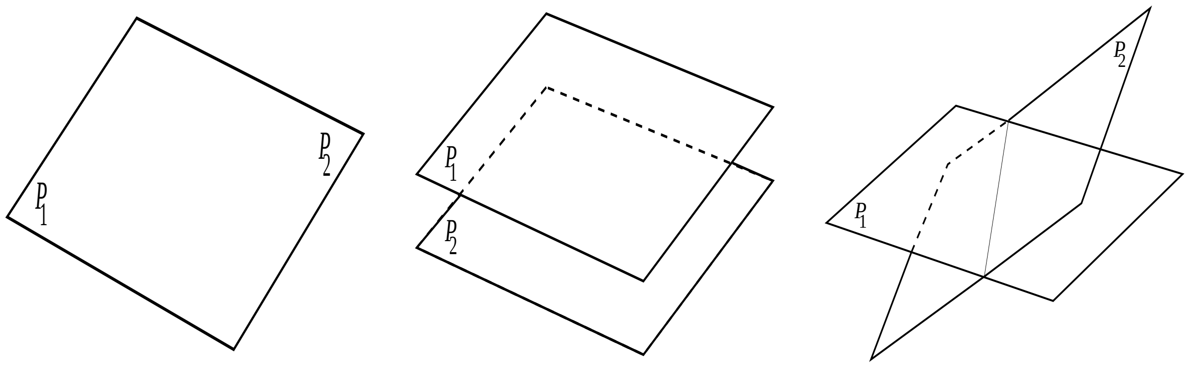


FIG. 2 – Interprétations géométriques de 3 systèmes linéaires de 2 équations à 3 inconnues.

Un système de 3 équations à 3 inconnues peut avoir une solution unique (l'intersection de trois plans « en position générale » est un point de l'espace). Mais il peut se faire que deux des plans soient parallèles, auquel cas le système n'aura pas de solution, ou bien que l'un des plans contienne l'intersection des deux autres, auquel cas le système aura une infinité de solutions.

Un système linéaire de m équations à n inconnues se présente sous la forme suivante.

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{1,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{1,n}\,x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{i,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{i,n}\,x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{m,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{m,n}\,x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Une *solution* de (S) est un n-uplet de réels qui satisfont à la fois ses m équations. *Résoudre* le système (S) c'est décrire l'ensemble des solutions. L'intuition géométrique des dimensions 2 et 3 reste valable en dimension n : l'ensemble des n-uplets de réels $(x_1, \ldots, x_n)$ qui vérifient une équation du type

$$a_{i,1}\,x_1 + \ldots + a_{i,n}\,x_n = b_i \ ,$$

où les a_i sont non tous nuls, est un sous-espace affine de dimension $n-1$ dans $\mathbb{R}^n$, que l'on appelle un *hyperplan*. Résoudre un système de m équations, c'est décrire l'intersection de m hyperplans dans $\mathbb{R}^n$. Cette intersection peut être vide, mais si elle ne l'est pas, c'est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$. Nous le démontrerons à la section suivante.

1.2 Ensemble des solutions

Nous nous limitons dans ce chapitre au cas réel, mais ce qui suit reste valable sur $\mathbb{C}$.

Considérons un système (S) de m équations à n inconnues.

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{1,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{1,n}\,x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{i,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{i,n}\,x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{m,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{m,n}\,x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Les *coefficients* $a_{i,j}$ et b_i sont des réels donnés. Les variables x_i sont les inconnues. Il faut comprendre (S) comme la conjonction (« et ») de m assertions portant sur les variables $(x_1, \ldots, x_n)$. Une *solution* est un n-uplet de réels qui vérifie chacune des m équations. L'ensemble des solutions est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Deux systèmes à n inconnues sont *équivalents* si et seulement si leurs ensembles de solutions sont les mêmes.

Par convention, on regroupe les termes contenant les inconnues à gauche de l'égalité, les termes constants à droite. La partie gauche s'appelle le premier membre, le m-uplet des constantes à droite de l'égalité est le second membre. On dit d'un système qu'il est *homogène* si tous les termes du second membre sont nuls. À un système (S), on associe le système homogène (H) obtenu en conservant le premier membre de (S) et en annulant le second membre.

$$(H) \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{1,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{1,n}\,x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{i,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{i,n}\,x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{m,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{m,n}\,x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Nous commençons par l'ensemble des solutions d'un système homogème.

Théorème 1. *Soit (H) un système homogène de m équations à n inconnues. L'ensemble des solutions de (H) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration : Observons que le n-uplet $(0, \ldots, 0)$ (vecteur nul de $\mathbb{R}^n$) est solution. L'ensemble des solutions de (H) n'est donc jamais vide.

Pour montrer qu'un ensemble non vide est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, il suffit de vérifier qu'il est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire que si deux éléments appartiennent à l'ensemble, toutes leurs combinaisons linéaires restent dans le même ensemble. Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux solutions de (H), λ et μ deux réels quelconques. Nous devons vérifier que $\lambda x + \mu y$ est solution de (H). Considérons la i-ième équation, vérifiée à la fois par x et y.

$$a_{i,1}\,x_1 + \ldots + a_{i,n}\,x_n = 0 \quad \text{et} \quad a_{i,1}\,y_1 + \ldots + a_{i,n}\,y_n = 0\ .$$

En multipliant la première par λ, la seconde par μ et en ajoutant les deux, on obtient :

$$\lambda(a_{i,1}\,x_1 + \ldots + a_{i,n}\,x_n) + \mu(a_{i,1}\,x_1 + \ldots + a_{i,n}\,x_n) = 0\ ,$$

soit,

$$a_{i,1}\,(\lambda x_1 + \mu y_1) + \ldots + a_{i,n}\,(\lambda x_n + \mu y_n) = 0\ .$$

Le n-uplet $(\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_n + \mu y_n)$ est donc solution de (H). $\square$

Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, au plus égale à n. Soit E l'espace vectoriel des solutions du système homogène (H). Il se peut que E soit de dimension 0, si $(0, \ldots, 0)$ est la seule solution de (H). Nous verrons plus loin que la dimension de E est au moins égale à $n - m$: un système homogène ayant moins d'équations que d'inconnues a une infinité de solutions. Soit k la dimension de E, et $s_1, \ldots, s_k$ k solutions particulières, formant une base de E. Toute solution de (H) s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de $s_1, \ldots, s_k$.

$$E = \{\, \lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_k s_k\ ,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\,\}\ . \tag{1}$$

Théorème 2. *Soit (S) un système linéaire et (H) le système homogène associé. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S) et E l'espace vectoriel des solutions de (H). Alors,*

- *soit $\mathcal{S}$ est vide,*
- *soit $\mathcal{S}$ est un espace affine de direction E.*

Démonstration : Supposons $\mathcal{S}$ non vide : soit $s_0 = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ une solution particulière de (S). Nous allons démontrer que toute solution de (S) est la somme de s_0 et d'une solution de (H). Soit $s = (x_1, \ldots, x_n)$ une solution quelconque de (S). Pour tout $i = 1, \ldots, m$, les deux solutions satisfont la i-ième équation.

$$a_{i,1}\,x_1^{(0)} + \ldots + a_{i,n}\,x_n^{(0)} = b_i \quad \text{et} \quad a_{i,1}\,x_1 + \ldots + a_{i,n}\,x_n = b_i\ .$$

Si on retranche la première équation de la seconde, on obtient :

$$a_{i,1}\,(x_1 - x_1^{(0)}) + \ldots + a_{i,n}\,(x_n - x_n^{(0)}) = 0\ .$$

Par conséquent, le n-uplet $s - s_0$ est solution du système homogène associé (H).

Réciproquement, on vérifie de la même façon que tout n-uplet somme de s_0 et d'une solution de (H) est solution de (S). $\square$

En joignant le théorème 2 et (1), on peut écrire l'ensemble des solutions de (S) comme suit.

$$\mathcal{S} = \{\, s_0 + \lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_k s_k\ ,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\,\}\ . \tag{2}$$

Vous pouvez retenir ce résultat ainsi :

La solution générale d'un système linéaire est la somme
d'une solution particulière
et de la solution générale du système homogène associé.

On retrouve ce même principe dans des problèmes très différents : équations de récurrence, équations différentielles, etc.

Le reste de ce chapitre est consacré à la *méthode du pivot de Gauss* qui permet de calculer explicitement des n uplets $s_0, s_1, \ldots, s_k$, tels que s_0 soit une solution particulière de (S) et $(s_1, \ldots, s_k)$ soit une base de l'espace vectoriel des solutions de (H).

1.3 Transformations équivalentes

L'idée de la méthode de Gauss est de transformer par étapes, le système à résoudre en des systèmes plus simples, tous équivalents au système initial, jusqu'à un système dit « résolu », sur lequel on lit directement la solution. Pour un système linéaire, « plus simple » signifie « avec moins de termes », ou encore « plus de coefficients nuls » . Pour annuler des termes, la méthode de Gauss combine les trois transformations de la proposition suivante.

Proposition 1. *Les transformations suivantes changent tout système en un système équivalent :*

1. *échanger deux lignes,*
2. *multiplier une ligne par un réel non nul,*
3. *ajouter une ligne à une autre ligne.*

Démonstration : Le résultat est évident pour la première transformation. Pour la seconde, si $(x_1, \ldots, x_n)$ est solution de (S), contenant l'équation

$$a_{i,1}\, x_1 + \ldots + a_{i,n}\, x_n = b_i \;, \tag{3}$$

alors $(x_1, \ldots, x_n)$ vérifie encore

$$\lambda(a_{i,1}\, x_1 + \ldots + a_{i,n})\, x_n = \lambda b_i \;, \tag{4}$$

pour tout λ. Réciproquement, si λ est non nul il suffit d'appliquer ce qui précède à $1/\lambda$ pour s'assurer que tout n-uplet solution de (4) est aussi solution de (3).

Pour le point *3*, considérons les deux lignes

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{i,1}\, x_1 + \ldots + a_{i,n}\, x_n &=& b_i \\ a_{k,1}\, x_1 + \ldots + a_{k,n}\, x_n &=& b_k \end{array}\right. \tag{5}$$

Elles sont remplacées par

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a_{i,1}\, x_1 & +\ldots & +a_{i,n}\, x_n &=& b_i \\ (a_{i,1}+a_{k,1})\, x_1 & +\ldots & +(a_{i,n}+a_{k,n})\, x_n &=& b_i + b_k \end{array}\right. \tag{6}$$

Si un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ vérifie (5), alors il vérifie aussi (6). Réciproquement, multiplions la première équation de (6) par -1 (ce qui ne change pas l'ensemble des solutions d'après le point *2*), puis ajoutons les deux équations. D'après ce qui précède, toute solution de (6) est aussi solution de (5). □

Ici, une mise en garde s'impose. Lorsqu'on remplace une ligne par une combinaison linéaire des autres, toute solution du système initial est encore solution du nouveau système. Mais l'ensemble des solutions du nouveau peut être strictement plus grand. Dans la démonstration ci-dessus, nous avons pris soin de vérifier les réciproques : il est essentiel que le système transformé soit bien *équivalent* au système initial.

La méthode de Gauss consiste à appliquer successivement les transformations de la proposition 1. Dans les deux sections suivantes, nous allons décrire les deux étapes principales.

1.4 Forme échelonnée

Nous dirons qu'un système est *échelonné* s'il se présente sous la forme suivante.

$$(S_E)\qquad\left\{\begin{array}{cccccccc}
p_1\,y_1\,+ & c_{1,2}\,y_2\,+ & \cdots & +\,c_{1,j}\,y_j\,+ & \cdots & +\,c_{1,n}\,y_n & = & d_1\\
 & p_2\,y_2\,+ & \cdots & +\,c_{2,j}\,y_j\,+ & \cdots & +\,c_{2,n}\,y_n & = & d_2\\
 & & \ddots & & & \vdots & \vdots & \\
 & & & p_r\,y_r\,+ & \cdots & +c_{r,n}\,y_n & = & d_r\\
 & & & & & 0 & = & d_{r+1}\\
 & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & 0 & = & d_m
\end{array}\right.$$

Mettre un système (S) *sous forme échelonnée*, c'est passer de (S) à (S_E) par les transformations de la proposition 1, et une permutation éventuelle des coordonnées, de sorte que

1. les inconnues $(y_1,\ldots,y_n)$ de (S_E) sont celles de (S), mais dans un ordre qui peut être différent,
2. les coefficients $p_1,\ldots p_r$ sont tous non nuls.

Les coefficients $p_1,\ldots,p_r$, que l'on appelle les *pivots*, jouent un rôle important. Pour arriver à la forme échelonnée avec des *pivots non nuls* on peut être amené au cours des calculs, à

1. permuter des variables
2. permuter des équations (application du point *1* de la proposition 1).

Le principe général consiste à utiliser une équation à pivot non nul pour annuler les termes au-dessous du pivot dans les équations suivantes du système. Décrire formellement l'algorithme dans le cas général, conduirait à des notations compliquées. Le mieux est de comprendre son fonctionnement sur des exemples. Dans ce qui suit nous utilisons la notation algorithmique $\longleftarrow$, pour « prend la valeur ». A part les permutations éventuelles de variables ou d'équations, les seules transformations utilisées sont du type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$, soit « la ligne i est remplacée par la somme de la ligne i, et de la ligne k multipliée par λ ». Cette transformation change le système en un système équivalent, d'après la proposition 1.

Voici un premier système.

$$
(S_1) \qquad \left\{\begin{array}{rrrrcl}
x & +2y & -z & +t & = & 1\\
x & +3y & +z & -t & = & 2\\
-x & +y & +7z & +2t & = & 3\\
2x & +y & -8z & +t & = & 4
\end{array}\right.
$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$
\begin{array}{l}
\\
L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\
L_3 \leftarrow L_3 + L_1\\
L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1
\end{array}
\quad
\left\{\begin{array}{rrrrcl}
x & +2y & -z & +t & = & 1\\
 & y & +2z & -2t & = & 1\\
 & 3y & +6z & +3t & = & 4\\
 & -3y & -6z & -t & = & 2
\end{array}\right.
$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$
\begin{array}{l}
\\
\\
L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2\\
L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2
\end{array}
\quad
\left\{\begin{array}{rrrrcl}
x & +2y & -z & +t & = & 1\\
 & y & +2z & -2t & = & 1\\
 & & & +9t & = & 1\\
 & & & -7t & = & 5
\end{array}\right.
$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$
z \longleftrightarrow t
\quad
\left\{\begin{array}{rrrrcl}
x & +2y & +t & -z & = & 1\\
 & y & -2t & +2z & = & 1\\
 & & 9t & & = & 1\\
 & & -7t & & = & 5
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{l}
\\
(S_{1,E})\\
\\
L_4 \leftarrow L_4 + \frac{7}{9}L_3
\end{array}
\quad
\left\{\begin{array}{rrrrcl}
x & +2y & +t & -z & = & 1\\
 & y & -2t & +2z & = & 1\\
 & & 9t & & = & 1\\
 & & & 0 & = & 52/9
\end{array}\right.
$$

Voici un deuxième système.

$$
(S_2) \qquad \left\{\begin{array}{rrrrcl}
x & +y & -3z & -4t & = & -1\\
2x & +2y & +2z & -3t & = & 2\\
3x & +6y & -2z & +t & = & 8\\
2x & +y & +5z & +t & = & 5
\end{array}\right.
$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$
\begin{array}{l}
\\
L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\\
L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1\\
L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1
\end{array}
\quad
\left\{\begin{array}{rrrrcl}
x & +y & -3z & -4t & = & -1\\
 & & 8z & +5t & = & 4\\
 & 3y & +7z & +13t & = & 11\\
 & -y & +11z & +9t & = & 7
\end{array}\right.
$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_4 \\ \\ L_4 \leftarrow L_2 \end{array} \quad \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & +y & -3z & -4t & = & -1 \\ & -y & +11z & +9t & = & 7 \\ & 3y & +7z & +13t & = & 11 \\ & & 8z & +5t & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \quad \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & +y & -3z & -4t & = & -1 \\ & -y & +11z & +9t & = & 7 \\ & & 40z & +40t & = & 32 \\ & & 8z & +5t & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{c} (S_{2,E}) \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{5}L_3 \end{array} \quad \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & +y & -3z & -4t & = & -1 \\ & -y & +11z & +9t & = & 7 \\ & & 40z & +40t & = & 32 \\ & & & -3t & = & -12/5 \end{array}\right.$$

Voici un troisième système.

$$(S_3) \quad \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & -y & +z & +t & = & 3 \\ 5x & +2y & -z & -3t & = & 5 \\ -3x & -4y & +3z & +2t & = & 1 \\ 6x & +y & & -2t & = & 8 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 6L_1 \end{array} \quad \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & -y & +z & +t & = & 3 \\ & 7y & -6z & -8t & = & -10 \\ & -7y & +6z & +5t & = & 10 \\ & 7y & -6z & -8t & = & -10 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array} \quad \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & -y & +z & +t & = & 3 \\ & +7y & -6z & -8t & = & -10 \\ & & & -3t & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(S_{3,E}) \quad \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & -y & +t & +z & = & 3 \\ & +7y & -8t & -6z & = & -10 \\ & & -3t & & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Remarquez l'échange de z et t pour respecter la règle des pivots non nuls.

La forme échelonnée n'est pas tout à fait la fin de l'histoire, mais elle donne déjà beaucoup de renseignements sur l'ensemble des solutions. Le système (S_E) peut contenir deux types d'équations. Celles dont le premier membre est nul, s'il y en a, sont les *équations de compatibilité*. Le système ne peut avoir de solution que si leur second membre est aussi nul.

Nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 3. *S'il est non vide, l'ensemble des solutions du système échelonné* (S_E) *est un espace affine de dimension* $n-r$.

Observons que l'entier r est nécessairement inférieur ou égal à m et à n.

$$r \leq \min\{m, n\} \ .$$

Il ne dépend que de la dimension de l'espace des solutions. D'après le théorème 2, la dimension de l'espace des solutions ne dépend pas du second membre, mais seulement du système homogène associé. Ceci justifie la définition générale suivante.

Définition 1. *Soit* (S) *un système de* m *équations à* n *inconnues, et* (S_H) *le système homogène associé. On appelle* rang *de* (S) *l'entier* $n-d$*, où* d *est la dimension de l'espace vectoriel des solutions de* (S_H).

1.5 Forme résolue

Une fois le système mis sous forme échelonnée, s'il y a des équations de compatibilité et si l'un des seconds membres de ces équations est non nul, le système n'a pas de solution (on dit qu'il est impossible). C'est le cas par exemple pour le système (S_1) de la section précédente.

S'il n'y a pas d'équations de compatibilité ou si leurs seconds membres sont nuls, le système a des solutions et il faut les calculer. À partir du système échelonné (S_H), les étapes successives sont les suivantes.

1. supprimer les équations de compatibilité s'il y en a,
2. diviser chacune des équations restantes par son pivot,
3. si $r < n$, passer les termes en $y_{r+1}, \ldots, y_n$ dans le second membre,
4. calculer $y_r, y_{r-1}, \ldots, y_1$, par combinaisons de lignes, en annulant les termes au-dessus de chaque pivot et en commençant par le dernier. Si $r < n$, $y_{r+1}, \ldots, y_n$ sont traités comme des paramètres, qui peuvent prendre des valeurs réelles arbitraires.

Nous reprenons comme exemples les systèmes (S_2) et (S_3) de la section précédente.

$$(S_{2,E}) \qquad \left\{ \begin{array}{rrrrcl} x & +y & -3z & -4t & = & -1 \\ & -y & +11z & +9t & = & 7 \\ & & 40z & +40t & = & 32 \\ & & & -3t & = & -12/5 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow (1/40)L_3 \\ L_4 \leftarrow -(1/3)L_4 \end{array} \quad \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & +y & -3z & -4t & = & -1 \\ & y & -11z & -9t & = & -7 \\ & & z & +t & = & 4/5 \\ & & & t & = & 4/5 \end{array}\right.$$

$$\iff$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 4L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 9L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ \end{array} \quad \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & +y & -3z & & = & 11/5 \\ & y & -11z & & = & 1/5 \\ & & z & & = & 0 \\ & & & t & = & 4/5 \end{array}\right.$$

$$\iff$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 11L_3 \\ \\ \\ \end{array} \quad \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & +y & & & = & 11/5 \\ & y & & & = & 1/5 \\ & & z & & = & 0 \\ & & & t & = & 4/5 \end{array}\right.$$

$$\iff$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & & & & = & 2 \\ & y & & & = & 1/5 \\ & & z & & = & 0 \\ & & & t & = & 4/5 \end{array}\right.$$

Le système est maintenant sous forme résolue : $(2, 1/5, 0, 4/5)$ est la seule solution.

Voici un autre exemple.

$$(S_{3,E}) \quad \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & -y & +t & +z & = & 3 \\ & +7y & -8t & -6z & = & -10 \\ & & -3t & & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow (1/7)L_2 \\ L_3 \leftarrow -(1/3)L_3 \end{array} \quad \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & -y & +t & +z & = & 3 \\ & y & -(8/7)t & -(6/7)z & = & -10/7 \\ & & t & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & -y & +t & = & 3 - z \\ & y & -(8/7)t & = & -(10/7) + (6/7)z \\ & & t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + (8/7)L3 \\ \\ \end{array} \quad \left\{\begin{array}{rrrcl} x & -y & & = & 3 - z \\ & y & & = & -(10/7) + (6/7)z \\ & & t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & (11/7) - (1/7)z \\ y & = & -(10/7) + (6/7)z \\ t & = & 0 \end{array} \right.$$

Le système est maintenant sous forme résolue. Il admet une infinité de solutions, dépendant du paramètre z. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions s'écrit

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{11}{7}, -\frac{10}{7}, 0, 0\right) + z\left(-\frac{1}{7}, \frac{6}{7}, 1, 0\right) \;,\; z \in \mathbb{R} \right\} .$$

C'est bien la forme prévue par le théorème 2 : $\mathcal{S}$ est une droite affine, passant par la solution particulière $(11/7, -10/7, 0, 0)$, de vecteur directeur $(-1/7, 6/7, 1, 0)$. Evidemment l'écriture de l'ensemble des solutions obtenue pas la méthode de Gauss, n'est pas la seule possible. Dans l'exemple ci-dessus, $\mathcal{S}$ pourrait aussi s'écrire :

$$\mathcal{S} = \{ (x, y, z, t) = (2, -4, -3, 0) + \lambda(1, -6, -7, 0) \,,\; \lambda \in \mathbb{R} \} .$$

2 Entraînement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Si un système a plus d'inconnues que d'équations, alors il a une infinité de solutions.
2. ☐ Si un système a plus d'équations que d'inconnues, alors il a au plus une solution.
3. ☒ Si le rang d'un système est égal au nombre d'équations, et strictement inférieur au nombre d'inconnues, alors le système a une infinité de solutions.
4. ☐ Si un système a une solution unique, alors il a autant d'équations que d'inconnues.
5. ☒ Si un système a une solution unique, alors son rang est égal au nombre d'inconnues.
6. ☒ Si un système n'a pas de solution, alors son second membre est non nul.
7. ☐ Si un système a un second membre nul et si son rang est égal au nombre d'équations, alors sa solution est unique.
8. ☒ Si un système de deux équations à deux inconnues n'a pas de solution, alors les deux équations sont celles de deux droites parallèles dans le plan.
9. ☐ Si un système de deux équations à trois inconnues n'a pas de solution, alors les deux équations sont celles de deux droites parallèles dans l'espace.

Vrai-Faux 2. Soit (S) un système linéaire et (H) le système homogène associé. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si (S) n'a pas de solution alors (H) n'a pas de solution.
2. ☐ Si (S) n'a pas de solution alors (H) a une solution unique.
3. ☐ (S) a une solution unique si et seulement si (H) a une solution unique.
4. ☒ Si (S) a une solution unique alors (H) a une solution unique.
5. ☒ Si (S) a une infinité de solutions, alors (H) a une infinité de solutions.
6. ☐ Si s_0 et s_1 sont deux solutions de (S) alors $s_0 + s_1$ est solution de (H)
7. ☒ Si s_0 et s_1 sont deux solutions de (S) alors $2(s_0 - s_1)$ est solution de (H)
8. ☐ Si s_0 et s_1 sont deux solutions de (S) alors $2(s_0 - s_1)$ est solution de (S)
9. ☒ Si s_0 et s_1 sont deux solutions de (S) alors $-s_0 + 2s_1$ est solution de (S)

Vrai-Faux 3. Soit (S) un système, que l'on résout par la méthode de Gauss. On note (S_E) le système sous forme échelonnée. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si au moins un des pivots est nul, le système est impossible.
2. ☐ Si (S) a une solution unique, alors dans (S_E), aucune équation n'a son premier membre nul.
3. ☒ Si (S) a plus d'équations que d'inconnues, alors dans (S_E), au moins une équation a son premier membre nul.
4. ☐ Si (S) a moins d'équations que d'inconnues, alors dans (S_E) aucune équation n'a son premier membre nul.
5. ☐ Si dans (S_E) une équation a ses deux membres nuls, alors (S) a une infinité de solutions.
6. ☒ Si (S) a moins d'équations que d'inconnues, et si dans (S_E) toute équation dont le premier membre est nul a un second membre nul, alors le système a une infinité de solutions
7. ☒ Si le système a une infinité de solutions alors il a moins d'équations que d'inconnues, ou bien au moins une équation dans (S_E) a un premier membre nul.
8. ☐ Si le système est impossible alors dans (S_E) aucune équation n'a un second membre nul.

Vrai-Faux 4. Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rrcl} x & -2y & = & a \\ -2x & +4y & = & b\,. \end{array} \right.$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S). Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Pour tout couple (a, b), $\mathcal{S}$ est un singleton.
2. ☐ Il existe (a, b) tel que $\mathcal{S}$ soit un singleton.

3. ☒ Si $a = b$ alors $\mathcal{S}$ est l'ensemble vide.
4. ☐ Si $b = -2a$ alors $\mathcal{S}$ est l'ensemble vide.
5. ☒ Si $b = -2a$ alors $\mathcal{S}$ est une droite affine.

Vrai-Faux 5. Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rrcl} x & +ay & = & 1 \\ x & +by & = & 0\,. \end{array} \right.$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S). Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Pour tout couple (a, b), $\mathcal{S}$ est un singleton.
2. ☒ Il existe (a, b) tel que $\mathcal{S}$ soit un singleton.
3. ☒ Si $a = b$ alors $\mathcal{S}$ est l'ensemble vide.
4. ☐ Si $b = 2a$ alors $\mathcal{S}$ est l'ensemble vide.
5. ☒ Si $a \neq 0$ et $b = 2a$ alors $\mathcal{S}$ est un singleton.

Vrai-Faux 6. Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rrcl} x & +ay & = & 1 \\ 2x & +by & = & 2\,. \end{array} \right.$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S). Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Pour tout couple (a, b), $\mathcal{S}$ est une droite affine.
2. ☒ Il existe (a, b) tel que $\mathcal{S}$ soit une droite affine.
3. ☐ Il existe (a, b) tel que $\mathcal{S}$ soit l'ensemble vide.
4. ☐ Si $b = 2a$ alors $\mathcal{S}$ est l'ensemble vide.
5. ☒ Si $b = 2a$ alors $\mathcal{S}$ est une droite affine.

Vrai-Faux 7. Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & -y & +z & = & 1 \\ -ax & +ay & -z & = & -1 \\ & & bz & = & 1\,. \end{array} \right.$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S).

1. ☐ Pour tout a, $\mathcal{S}$ est non vide.
2. ☐ Si $b \neq 0$, alors pour tout a, $\mathcal{S}$ est un singleton.
3. ☒ Si $(a, b) = (1, 1)$, alors $\mathcal{S}$ est une droite affine.
4. ☐ Si $(a, b) \neq (1, 1)$, alors $\mathcal{S}$ a au plus un élément.
5. ☒ Si $(0, 0, 1) \in \mathcal{S}$, alors $b = 1$.

2.2 Exercices

Exercice 1. Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel a, l'ensemble des solutions des systèmes suivants.

$$\left\{\begin{array}{rrcl} x & -2y & = & 2 \\ x & -ay & = & a \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrcl} ax & +y & = & 2 \\ x & +ay & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrcl} ax & +(1-a)y & = & 1 \\ (1-a)x & -ay & = & a \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrcl} ax & +(1-a)y & = & a \\ ax & +ay & = & a \end{array}\right.$$

Exercice 2. Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +3z & = & 5 \\ 2x & -4y & +z & = & 5 \\ 3x & -5y & +2z & = & 8 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +2y & -z & = & 5 \\ 2x & +y & +z & = & 10 \\ x & & +2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -y & +3z & = & 2 \\ -x & +4y & +z & = & -1 \\ 3x & -2y & -3z & = & 4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -z & = & 3 \\ x & -y & +z & = & 2 \\ x & +y & +2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} & -y & +z & = & 1 \\ -5x & +2y & -z & = & -1 \\ x & & -2z & = & 4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcr} & +y & -2z & = & 3 \\ -2x & -3y & +z & = & 2 \\ 3x & +y & -2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 10x & +9y & +z & = & -50 \\ 9x & +10y & +5z & = & 40 \\ x & +5y & +9z & = & 180 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcr} 10x & +9y & +z & = & -50 \\ 9x & +10y & +5z & = & 41 \\ x & +5y & +9z & = & 180 \end{array}\right.$$

Exercice 3. Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +3z & = & 0 \\ 2x & -4y & +z & = & 0 \\ 3x & -6y & +2z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +2y & -z & = & 0 \\ 2x & +y & -2z & = & 0 \\ x & & -z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -y & +3z & = & 0 \\ -x & +4y & +z & = & 3 \\ & -3y & -4z & = & -3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -z & = & 0 \\ x & -y & +z & = & 1 \\ x & +2y & -3z & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} & -y & +z & = & 1 \\ 3x & +2y & -z & = & 2 \\ x & & -2z & = & -1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcr} & +y & -2z & = & 3 \\ -2x & -3y & +z & = & -2 \\ 3x & +y & -3z & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 4. Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -y & -z & -t & = & 3 \\ 2x & & -z & +3t & = & 9 \\ 3x & +3y & +2z & & = & 4 \\ -x & -2y & +z & -t & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -y & +z & -t & = & 1 \\ x & +y & -z & -t & = & -1 \\ x & +y & +z & -t & = & 0 \\ x & -y & -z & +t & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} 3x & +4y & +z & +2t & = & 3 \\ 6x & +8y & +2z & +5t & = & 7 \\ 9x & +12y & +3z & +10t & = & 13 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -2y & +z & +t & = & -2 \\ 2x & -y & -z & -t & = & -1 \\ x & +y & +z & +t & = & -8 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +2y & -3z & = & 4 \\ x & +3y & -z & = & 11 \\ 2x & +5y & -5z & = & 13 \\ x & +4y & +z & = & 18 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcr} & y & +z & = & 5 \\ x & & +z & = & 4 \\ x & +y & +2z & = & 9 \\ -x & +y & & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 5. Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel a, l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants.

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & +3y & -2z & = & 5 \\ x & -2y & +3z & = & 2 \\ 4x & -y & +4z & = & a \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcr} x & -y & +az & = & a \\ x & +ay & -z & = & -1 \\ x & +y & +z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +(2a-1)z & = & 1 \\ ax & +y & +z & = & 1 \\ x & +ay & +z & = & 3(a+1) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcr} 3ax & +(3a-7)y & +(a-5)z & = & a-1 \\ (2a-1)x & +(4a-1)y & +2az & = & a+1 \\ 4ax & +(5a-7)y & +(2a-5)z & = & a-1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & +ay & +4z & = & 0 \\ x & +y & +2az & = & -3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +2y & -z & +t & = & 1 \\ x & +3y & +z & -t & = & 1 \\ 2x & +y & -8z & +t & = & a \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +az & = & 1 \\ 3x & -ay & +2z & = & 1 \\ ax & +y & -z & = & 0 \\ x & -2y & +z & = & a \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr} ax & +y & +z & +t & = & 1 \\ x & +ay & +z & +t & = & -1 \\ x & +y & +az & +t & = & 1 \\ x & +y & +z & +at & = & -1 \end{array}\right.$$

Exercice 6. Déterminer, selon les valeurs des paramètres réels a et b, l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants.

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 3x & +y & -z & = & 1 \\ 5x & +2y & -2z & = & a \\ 4x & +y & -z & = & b \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcr} ax & +(b-1)y & +2z & = & 1 \\ ax & +(2b-3)y & +3z & = & 1 \\ ax & +(b-1)y & +(b+2)z & = & 2b-3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -z & = & 2 \\ x & -y & +z & = & 4 \\ 3x & +3y & -z & = & 4a \\ (2-a)x & +2y & -2z & = & -2b \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr} ax & +y & +z & +t & = & 1 \\ x & +ay & +z & +t & = & b \\ x & +y & +az & +t & = & b^2 \\ x & +y & +z & +at & = & b^3 \end{array}\right.$$

Exercice 7. Résoudre les systèmes linéaires suivants dans $\mathbb{C}$.

$$\left\{\begin{array}{rrcr} x & -\mathrm{i}y & = & 1 \\ \mathrm{i}x & -y & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrcr} \mathrm{i}x & -\mathrm{i}y & = & 1+\mathrm{i} \\ \mathrm{i}x & +y & = & 1-\mathrm{i} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrcr} (1+2\mathrm{i})x & -\mathrm{i}y & = & 1 \\ \mathrm{i}x & -(1+\mathrm{i})y & = & 1+3\mathrm{i} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrcr} (1+\mathrm{i})x & -\mathrm{i}y & = & 1 \\ \mathrm{i}x & +(1-\mathrm{i})y & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrcr} x & -\mathrm{i}y & = & 1 \\ \mathrm{i}x & +y & = & \mathrm{i} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrcr} (1+\mathrm{i})x & (1-\mathrm{i})y & = & \mathrm{i} \\ (1-\mathrm{i})x & +(1+\mathrm{i})y & = & 1-\mathrm{i} \end{array}\right.$$

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1.

- A Si un système a 4 équations et 2 inconnues, alors il est impossible.
- B Si un système a 1 équation et 3 inconnues, alors il a une infinité de solutions.
- C Si un système a 3 équations, 2 inconnues, et un second membre nul, alors il a au moins une solution.
- D Si un système a 2 équations, 2 inconnues, et un second membre nul, alors il a exactement une solution.
- E Si un système a 3 équations et 2 inconnues, et un second membre nul, alors il a une infinité de solutions.

Question 2. Soit (S) un système de 2 équations à 3 inconnues.

- A Le système (S) a forcément une infinité de solutions.
- B Si les deux équations ont le même premier membre, alors le système (S) a une infinité de solutions.
- C L'ensemble des solutions du système (S) est forcément une droite affine.
- D Le système (S) est impossible si et seulement si les deux équations sont celles de deux plans parallèles non confondus.
- E Si le système (S) a une solution, alors il en a une infinité.

Question 3. Soit (S) un système linéaire et (H) le système homogène associé.

- A Le système (H) a forcément au moins une solution.
- B Si le système (S) est impossible, alors le système (H) a une infinité de solutions.
- C Si le système (S) a une infinité de solutions, alors le système (H) a une infinité de solutions.
- D Si s_0 et s_1 sont deux solutions de (S), alors $3s_0 - 2s_1$ est solution de (H).
- E Si s_0 et s_1 sont deux solutions de (H), alors $3s_0 - 2s_1$ est solution de (S).

Question 4. Soit (S) un système, que l'on résout par la méthode de Gauss. On note (S_E) le système sous forme échelonnée.

- A Si (S) a 2 équations et 3 inconnues, alors dans (S_E) aucune équation n'a son premier membre nul.
- B Si (S) a 3 équations et 2 inconnues, alors dans (S_E) au moins une équation a son premier membre nul.
- C Si (S) a 4 équations et 3 inconnues, alors dans (S_E) exactement une équation a son premier membre nul.

$\boxed{\text{D}}$ Si dans (S_E) toute équation dont le premier membre est nul a aussi un second membre nul, alors le système (S) a au moins une solution.

$\boxed{\text{E}}$ Si (S) a une solution unique, alors dans (S_E) aucune équation n'a son premier membre nul.

Question 5. Soit (S) un système de 4 équations à 3 inconnues.

$\boxed{\text{A}}$ Le rang de (S) est au moins égal à 3.

$\boxed{\text{B}}$ Si (S) est de rang 3, alors (S) a une solution unique.

$\boxed{\text{C}}$ Si (S) est de rang 2, alors soit (S) est impossible, soit l'ensemble des solutions de (S) est une droite affine.

$\boxed{\text{D}}$ Si (S) est de rang 1, alors l'ensemble des solutions de (S) est un plan affine.

$\boxed{\text{E}}$ Si (S) est de rang 3 et si son second membre est nul, alors $(0,0,0)$ est l'unique solution de (S).

Question 6. Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rrcl} 4x & -2y & = & a \\ -2x & +y & = & b\,. \end{array} \right.$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S).

$\boxed{\text{A}}$ Si $a = b \neq 0$ alors $\mathcal{S}$ est l'ensemble vide.

$\boxed{\text{B}}$ Il existe un couple (a,b) tels que $\mathcal{S}$ soit un singleton.

$\boxed{\text{C}}$ Pour tout couple (a,b) tel que $a \neq b$, le système (S) est impossible.

$\boxed{\text{D}}$ Il existe un couple (a,b) tels que $\mathcal{S}$ soit un espace affine de dimension 2.

$\boxed{\text{E}}$ Si $a = -2b$ alors $\mathcal{S}$ est une droite affine.

Question 7. Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rrcl} x & -ay & = & a \\ ax & -ay & = & b\,. \end{array} \right.$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S).

$\boxed{\text{A}}$ Si $(a,b) = (1,1)$, alors $\mathcal{S}$ est une droite affine.

$\boxed{\text{B}}$ Si $a = 0$, alors pour tout b le système est impossible.

$\boxed{\text{C}}$ Si $(a,b) = (1,2)$, alors $\mathcal{S}$ est un singleton.

$\boxed{\text{D}}$ Si $(a,b) = (2,1)$, alors $\mathcal{S}$ est un singleton.

$\boxed{\text{E}}$ Si $a \neq b$, alors $\mathcal{S}$ n'est pas vide.

Question 8. Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rrcl} x & -ay & = & 1 \\ -2x & +by & = & -2\,. \end{array} \right.$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S).

A Si le produit ab est nul, alors $\mathcal{S}$ est un singleton.
B Pour tout couple (a, b), le système (S) a au moins une solution.
C Pour tout couple (a, b), $(1, 0)$ appartient à $\mathcal{S}$.
D Il existe un couple (a, b) tel que $(0, 0)$ appartienne à $\mathcal{S}$.
E Si $a = b$, alors $\mathcal{S}$ est une droite affine.

Question 9. Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & -y & +z & = & 1 \\ & ay & +z & = & 1 \\ & & bz & = & 2a\ . \end{array} \right.$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S).
A Pour $(a, b) = (1, 1)$ le système (S) est sous forme échelonnée.
B Si $(a, b) = (0, 1)$, alors $\mathcal{S}$ est vide.
C Si $(a, b) = (0, 0)$, alors $\mathcal{S}$ est un plan affine.
D Si $b \neq 0$, alors pour tout a, $\mathcal{S}$ est un singleton.
E Si $a = 0$, alors pour tout b, $\mathcal{S}$ est vide.

Question 10. Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & -y & +z & = & 1 \\ -ax & +ay & -z & = & -1 \\ -x & +y & +bz & = & b\ . \end{array} \right.$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S).
A Si $a = 1$, alors pour tout b, $\mathcal{S}$ est une droite affine.
B Pour tout (a, b), $\mathcal{S}$ est non vide.
C Il existe (a, b) tel que $\mathcal{S}$ soit un singleton.
D Pour $(a, b) = (1, 0)$, $(0, 0, 0) \in \mathcal{S}$.
E Pour $(a, b) = (1, -1)$, $\mathcal{S}$ est un plan affine.

Réponses : 1–BC 2–DE 3–AC 4–BD 5–CE 6–AE 7–AD 8–BC 9–AB 10–BE

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours : On considère un système (S) de m équations à n inconnues.

1. Qu'appelle-t-on *système homogène associé* à (S) ?
2. Démontrer que l'ensemble des solutions du système homogène associé, noté (H), est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
3. En supposant que l'ensemble des solutions de (S) est non vide, démontrer que c'est un espace affine, dont l'espace vectoriel associé est l'ensemble des solutions de (H).
4. Qu'appelle-t-on *forme échelonnée* pour le système (S) ?
5. Qu'est ce que le *rang* du système (S) ? Comment détermine-t-on le rang à partir de la forme échelonnée ?

Exercice 1 : Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rrrcl} & ay & +az & = & ab \\ & & bz & = & a \\ x & +y & +z & = & 1\,. \end{array} \right.$$

1. Mettre le système (S) sous forme échelonnée, discuter son rang selon les valeurs de a et b.
2. Si a et b sont tous les deux non nuls, montrer que le système a une solution unique, et donner l'expression de cette solution en fonction de a et b.
3. Pour $a = 0$, donner des équations paramétriques de l'ensemble des solutions de (S).

Exercice 2 : On considère un espace affine de dimension 3, muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation implicite $x + y + z = 1$. Soient a et b deux paramètres réels. Soit A le point de coordonnées $(1, 1, a)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(1, 0, b)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A, de vecteur directeur $\vec{u}$. Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

1. Vérifier que le vecteur $\vec{u}$ appartient au plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$ si et seulement si $b = -1$.
2. Pour $b \neq -1$ montrer que l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ est réduite à un point.
3. Pour $b = -1$, montrer que l'intersection de $\mathcal{P}$ est vide si $a \neq -1$, égale à $\mathcal{D}$ si $a = -1$.

4. Vérifier que $\mathcal{D}$ est l'intersection des deux plans d'équations implicites $bx-z=b-a$ et $y=1$. Ecrire le système linéaire caractérisant l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.
5. Mettre ce système sous forme échelonnée.
6. Discuter le rang du système et la dimension de l'ensemble des solutions selon les valeurs de a et b (retrouver les résultats des questions 1, 2 et 3).
7. Pour $b \neq -1$ donner l'expression de la solution du système en fonction de a et b.

Exercice 3 : Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rrrrcl} 2x & +y & +z & +t & = & 0 \\ -2x & & +z & -t & = & 1 \\ 4x & +3y & +(b+4)z & +(a+1)t & = & 1 \\ 2x & +3y & +(b+5)z & +(a+2b)t & = & a+1\,. \end{array} \right.$$

1. Mettre le système (S) sous forme échelonnée.
2. Discuter le rang du système selon les valeurs de a et b.
3. Pour $b=0$, donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que le système (S) ait des solutions.
4. Pour $(a,b)=(0,1)$, montrer que l'ensemble des solutions est un plan affine dont on donnera des équations paramétriques.
5. Pour $b \neq 0$, montrer que le système a une solution unique, dont on donnera l'expression en fonction de a et b.

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1. Le système homogène est obtenu en annulant le second membre de (S). Si (S) est le système suivant,

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{1,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{1,n}\,x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{i,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{i,n}\,x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{m,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{m,n}\,x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

alors le système homogène associé est :

$$(H) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{1,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{1,n}\,x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{i,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{i,n}\,x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{m,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{m,n}\,x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

2. Le n-uplet $(0,\dots,0)$ (vecteur nul de $\mathbb{R}^n$) est solution. L'ensemble des solutions de (H) n'est donc jamais vide.

   Pour montrer qu'un ensemble non vide est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, il suffit de vérifier qu'il est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire que si deux éléments appartiennent à l'ensemble, toutes leurs combinaisons linéaires restent dans le même ensemble. Soient $x = (x_1,\dots,x_n)$ et $y = (y_1,\dots,y_n)$ deux solutions de (H), λ et μ deux réels quelconques. Nous devons vérifier que $\lambda x + \mu y$ est solution de (H). Considérons la i-ième équation, vérifiée à la fois par x et y.

   $$a_{i,1}\,x_1 + \ldots + a_{i,n}\,x_n = 0 \quad \text{et} \quad a_{i,1}\,y_1 + \ldots + a_{i,n}\,y_n = 0\;.$$

   En multipliant la première par λ, la seconde par μ et en ajoutant les deux, on obtient :

   $$\lambda(a_{i,1}\,x_1 + \ldots + a_{i,n}\,x_n) + \mu(a_{i,1}\,x_1 + \ldots + a_{i,n}\,x_n) = 0\;,$$

   soit,

   $$a_{i,1}\,(\lambda x_1 + \mu y_1) + \ldots + a_{i,n}\,(\lambda x_n + \mu y_n) = 0\;.$$

   Le n-uplet $(\lambda x_1 + \mu y_1,\dots,\lambda x_n + \mu y_n)$ est donc solution de (H).

3. Soit $s_0 = (x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$ une solution particulière de (S). Nous devons démontrer que toute solution de (S) est la somme de s_0 et d'une solution de (H). Soit $s = (x_1,\dots,x_n)$ une solution quelconque de (S). Pour tout $i = 1,\dots,m$, les deux solutions satisfont la i-ième équation.

   $$a_{i,1}\,x_1^{(0)} + \ldots + a_{i,n}\,x_n^{(0)} = b_i \quad \text{et} \quad a_{i,1}\,x_1 + \ldots + a_{i,n}\,x_n = b_i\;.$$

   Si on retranche la première équation de la seconde, on obtient :

   $$a_{i,1}\,(x_1 - x_1^{(0)}) + \ldots + a_{i,n}\,(x_n - x_n^{(0)}) = 0\;.$$

   Par conséquent, le n-uplet $s - s_0$ est solution du système homogène associé (H). Réciproquement, on vérifie de la même façon que tout n-uplet somme de s_0 et d'une solution de (H) est solution de (S).

4. On dit qu'un système est *échelonné* s'il se présente sous la forme suivante.

   $$(S_E)\qquad \left\{\begin{array}{cccccccc} p_1\,y_1 + & c_{1,2}\,y_2 + & \cdots & + c_{1,j}\,y_j + & \cdots & + c_{1,n}\,y_n & = & d_1\\ & p_2\,y_2 + & \cdots & + c_{2,j}\,y_j + & \cdots & + c_{2,n}\,y_n & = & d_2\\ & & \ddots & & & \vdots & & \vdots\\ & & & p_r\,y_r + & \cdots & + c_{r,n}\,y_n & = & d_r\\ & & & & & 0 & = & d_{r+1}\\ & & & & & & & \vdots\\ & & & & & 0 & = & d_m \end{array}\right.$$

   Mettre un système (S) *sous forme échelonnée*, c'est passer de (S) à (S_E) par des transformations équivalentes des lignes, et une permutation éventuelle des coordonnées, de sorte que

   (a) les inconnues $(y_1, \ldots, y_n)$ de (S_E) sont celles de (S), mais dans un ordre qui peut être différent,

   (b) les coefficients $p_1, \ldots p_r$ sont tous non nuls.

5. Si n est le nombre d'inconnues, le rang du système est le complément à n de la dimension de l'espace vectoriel des solutions du système homogène associé. Sur la forme échelonnée, le rang est le nombre de pivots non nuls.

Exercice 1 :

1. Ce système est déjà sous forme échelonnée : il suffit de permuter les équations.

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 1 \\ & ay & +az & = & ab \\ & & bz & = & a\ . \end{array} \right.$$

   - Si $b = 0$, $a = 0$, le système (S) est de rang 1,
   - si $b = 0$, $a \neq 0$, le système (S) est de rang 2,
   - si $b \neq 0$, $a = 0$, le système (S) est de rang 2,
   - si $b \neq 0$, $a \neq 0$, le système (S) est de rang 3.

2. Si a et b sont tous les deux non nuls, le système (S) est de rang 3, donc il a une solution unique.

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x & & & = & 1 - b \\ & y & & = & b - a/b \\ & & z & = & a/b\ . \end{array} \right.$$

3. Pour $a = 0$, la seconde équation s'annule.

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 1 \\ & & bz & = & 0\ . \end{array} \right.$$

   Si $b = 0$, l'ensemble des solutions est le plan d'équation implicite $x + y + z = 1$, dont des équations paramétriques sont par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 - \lambda - \mu \\ y & = & \lambda \\ z & = & \mu \end{array} \right. \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ .$$

   Si $b \neq 0$, l'ensemble des solutions est une droite affine, d'équations paramétriques :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 - \lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & 0 \end{array} \right. \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}\ .$$

Exercice 2 :

1. Un vecteur de coordonnées (x, y, z) appartient au plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$ si et seulement si $x + y + z = 0$. C'est le cas pour $\vec{u}$ si et seulement si $1 + b = 0$, soit $b = -1$.
2. Pour $b \neq -1$, la droite vectorielle associée à $\mathcal{D}$ n'est pas incluse dans le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$, d'après ce qui précède. Comme l'espace est de dimension 3, l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ est réduite à un point.
3. Pour $b = -1$, la droite vectorielle associée à $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$. Deux cas sont possibles : soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, soit $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$. Pour distinguer les deux cas, il suffit de vérifier si le point A appartient à $\mathcal{P}$ ou non. Si $a = -1$, $1 + 1 + a = 1$, donc $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \mathcal{D}$, si $a \neq -1$, $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$.
4. La droite $\mathcal{D}$ a pour équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+\lambda \\ y &=& 1 \\ z &=& a+\lambda b \end{array}\right. \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}\ .$$

   En multipliant la première équation par b, et en lui retranchant la troisième, on obtient $bx - z = b - a$. Donc $\mathcal{D}$ est incluse dans l'intersection des deux plans d'équations $bx - z = b - a$ et $y = 1$. Réciproquement l'intersection de ces deux plans est une droite (car ayant des vecteurs normaux indépendants, ils ne peuvent être ni confondus ni parallèles). D'où le résultat. L'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ est donc l'ensemble des points de (x, y, z) solutions de :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +z &=& 1 \\ & y & &=& 1 \\ bx & & -z &=& b-a\ . \end{array}\right.$$

5. Pour mettre ce système sous forme échelonnée, il faut retrancher la première ligne multipliée par b de la troisième :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +z &=& 1 \\ & y & &=& 1 \\ & -by & -(1+b)z &=& -a\ , \end{array}\right.$$

   puis ajouter la seconde ligne multipliée par b à la troisième :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +z &=& 1 \\ & y & &=& 1 \\ & & -(1+b)z &=& b-a\ . \end{array}\right.$$

6. Si $b = -1$, le rang du système est 2, sinon il est égal à 3. Si $b \neq -1$, le système a une solution unique, si $b = -1$, alors soit $a \neq b$ et le système n'a pas de solution, soit $a = b$ et l'ensemble des solutions du système est une droite.

7. Pour $b \neq -1$, on trouve :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & & & = & \frac{b-a}{1+b} \\ & y & & = & 1 \\ & & z & = & \frac{a-b}{1+b} \end{array}\right. .$$

Exercice 3 :

1. Voici les étapes de la mise sous forme échelonnée.

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x & +y & +z & +t & = & 0 \\ & y & +2z & & = & 1 \\ & y & +(b+2)z & +(a-1)t & = & 1 \\ & 2y & +(b+4)z & +(a+2b-1)t & = & a+1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{array} \left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x & +y & +z & +t & = & 0 \\ & y & +2z & & = & 1 \\ & & bz & +(a-1)t & = & 0 \\ & & bz & +(a+2b-1)t & = & a-1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array} \left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x & +y & +z & +t & = & 0 \\ & y & +2z & & = & 1 \\ & & bz & +(a-1)t & = & 0 \\ & & & 2bt & = & a-1 \end{array}\right.$$

2.
   - Si $b = 0$, $a = 1$, le système (S) est de rang 2,
   - si $b = 0$, $a \neq 1$, le système (S) est de rang 3,
   - si $b \neq 0$, le système (S) est de rang 4.
3. Pour $b = 0$, $a = 1$ est la condition nécessaire et suffisante pour que le système ait des solutions.
4. Pour $(a, b) = (0, 1)$, les deux dernières équations s'annulent. On peut résoudre les deux précédentes en fonction de z et t :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} x & & = & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t \\ & y & = & 1 - 2z \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est de dimension 2, c'est donc un plan, dont un système d'équations paramétriques est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu \\ y & = & 1 - 2\lambda \\ z & = & \lambda \\ t & = & \mu \end{array}\right. \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} .$$

5. Pour $b \neq 0$, le système est de rang 4, il a donc une solution unique. On obtient :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{1}{2} - \frac{(a-1)^2}{4b^2} - \frac{a-1}{4b} \\ y & = & 1 + \frac{(a-1)^2}{b^2} \\ z & = & -\frac{(a-1)^2}{2b^2} \\ t & = & \frac{a-1}{2b}\;. \end{array}\right.$$

---

3 Compléments

3.1 Les formules de Cramer

Quand un système linéaire de n équations à n inconnues est de rang n, il a une solution unique. Il existe une formule explicite qui relie la solution $(x_1, \ldots, x_n)$ aux coefficients. Elle est connue, au moins pour les faibles valeurs de n, depuis très longtemps, même si elle est attribuée traditionnellement au mathématicien genevois Gabriel Cramer (1704-1752).

Commençons par le cas $n = 2$.
$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 & = & b_2 \end{array}\right.$$
Ce système a une solution unique si et seulement si son *déterminant* est non nul.
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} \neq 0\;.$$
Si c'est le cas, les coordonnées de la solution s'écrivent comme des rapports de déterminants.
$$x_1 = \frac{b_1a_{2,2} - b_2a_{1,2}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{b_2a_{1,1} - b_1a_{2,1}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta}\;.$$
Une formule analogue permet de calculer la solution d'un système 3×3.
$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 & = & b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 & = & b_3 \end{array}\right.$$
Ce système a une solution unique si et seulement si son *déterminant* est non nul.
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \neq 0\;.$$

Si c'est le cas les coordonnées de la solution s'écrivent encore comme des rapports de déterminants.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & b_3 & a_{3,3} \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}}{\Delta} \; .$$

La notion de déterminant s'étend à des tableaux carrés de nombres $n \times n$ pour n quelconque. On peut en donner la définition récursive suivante.

Définition 2. *Soit* $(a_{i,j})$, $i, j = 1, \ldots, n$ *un tableau carré de* $n \times n$ *réels.*

1. *Si* $n = 1$*, on appelle déterminant d'un tableau contenant un seul réel ce réel lui-même.*
2. *si* $n > 1$*, pour* $i = 1, \ldots, n$ *notons* Δ_i *le déterminant du tableau carré* $(n–1)\times(n–1)$ *obtenu en supprimant la première colonne et la* i*-ième ligne du tableau initial. On appelle* déterminant *du tableau* $n \times n$ *la quantité*

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \Delta_i \; .$$

Vous pouvez vérifier que l'application de cette définition à un déterminant 2×2 ou 3×3 donne bien le calcul que vous savez effectuer.

Les formules de Cramer expriment les coordonnées de la solution d'un système de n équations à n inconnues comme des rapports de déterminants.

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{1,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{1,n}\,x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}\,x_1+ & \cdots & a_{i,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{i,n}\,x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{n,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{n,n}\,x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

Le *déterminant* de ce système est celui du tableau des coefficients du premier membre.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \; .$$

Théorème 4. *Le système* (S) *a une solution unique si et seulement si son déterminant* Δ *est non nul. Pour* $j = 1, \ldots, n$*, notons* Δ_j *le déterminant obtenu en remplaçant la* j*-ième colonne de* Δ *par le second membre. Si* $\Delta \neq 0$*, l'unique solution du système* (S) *est telle que :*

$$\forall j = 1, \ldots, n \; , \quad x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \; .$$

Pour séduisantes qu'elles soient, les formules de Cramer sont parfaitement inefficaces. Le problème vient du calcul du déterminant. Si on applique la définition récursive 2, elle implique n calculs de déterminants de taille $(n-1) \times (n-1)$, suivis de n multiplications et $(n-1)$ additions. Pour chacun des déterminants de taille $(n-1) \times (n-1)$, il faudra recommencer avec $n-1$ déterminants de taille $(n-2) \times (n-2)$. Au total, si on programme avec un algorithme récursif la définition 2, le calcul d'un déterminant $n \times n$ prendra de l'ordre de $n(n!)$ opérations.

Il se trouve que le bon moyen algorithmique de calculer un déterminant est ... la méthode du pivot de Gauss. On montre en effet qu'un déterminant n'est pas modifié si on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres. Il est changé en son opposé si deux lignes ou deux colonnes sont permutées. Si on applique la méthode du pivot de Gauss au système (S), on arrive à un système échelonné (S_E). Le déterminant de (S_E) est celui d'un tableau de nombres *triangulaire* : ses coefficients au-dessous de la diagonale sont nuls. Le déterminant de (S_E), qui est égal ou opposé à celui de (S), est tout simplement le produit des pivots. Le nombre d'opérations pour calculer un déterminant $n \times n$ par la méthode du pivot de Gauss est de l'ordre de $\frac{2}{3}n^3$, soit très inférieur à ce que requiert la définition 2.

Donc pour utiliser les formules de Cramer, il faudrait appliquer la méthode du pivot de Gauss à $(n+1)$ systèmes, avant d'effectuer les quotients des déterminants obtenus : mieux vaut ne l'appliquer qu'à un seul !

3.2 Tout blanc tout noir

La figure 3 représente un graphe : cinq sommets numérotés de 1 à 5 et des arêtes entre eux (les arêtes ne sont pas orientées et il n'y a pas de boucle sur un même sommet).

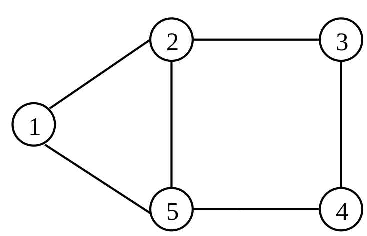


FIG. 3 – Graphe à 5 sommets et 6 arêtes.

Imaginez que sur chaque sommet se trouve une ampoule, et un interrupteur qui commande non seulement l'ampoule du même sommet, mais aussi celles des sommets voisins. Par exemple appuyer sur l'interrupteur du sommet 2 bascule l'état des ampoules 1, 2, 3 et 5, de « éteinte » à « allumée », ou bien le contraire. La première observation, est que l'ordre dans lequel les interrupteurs sont actionnés, n'a pas d'influence sur le résultat. Si tout est éteint et que vous actionnez l'interrupteur 1, les ampoules 1, 2 et 5 s'allument. Si ensuite vous actionnez 2, les ampoules 1, 2 et 5 s'éteignent, et 3 s'allume. Le résultat est le même si l'interrupteur 2 est actionné avant le 1. On peut donc parler de l'effet d'un *ensemble* d'interrupteurs, sans considération de l'ordre dans lequel ils sont actionnés.

Si toutes les ampoules sont éteintes, quel ensemble d'interrupteurs faut-il actionner pour les allumer toutes ? Ou de manière plus condensée, comment passer de « tout noir » à « tout blanc ». De manière assez surprenante, ce problème a toujours au moins une solution quel que soit le graphe, et on peut le résoudre à l'aide de la méthode du pivot de Gauss[1].

Attention, les calculs ne seront pas ceux dont vous avez l'habitude : nous abandonnons les réels pour un ensemble de nombres beaucoup plus petit. Pour jouer le rôle des réels, tout ensemble de nombres doit contenir au moins les éléments neutres pour l'addition et la multiplication : 0 et 1. Le plus petit ensemble possible, celui des entiers modulo 2, ne contient que 0 et 1. On le note $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Voici les tables d'addition et de multiplication.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Sur l'ensemble des n-uplets de 0 ou de 1, les opérations de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agissent composante par composante. Par exemple pour $n = 4$:

$$(0,1,0,1) + (1,0,0,1) = (1,1,0,0) .$$

Cet ensemble, noté $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, tout comme $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. La méthode de résolution des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^n$, reste valable dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, en n'oubliant pas que $1 + 1 = 0$.

Etant donné le problème « tout blanc – tout noir » sur un graphe à n sommets, nous allons lui associer un système linéaire de n équations à n inconnues.

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{1,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{1,n}\,x_n & = & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{i,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{i,n}\,x_n & = & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}\,x_1+ & \cdots & +a_{m,j}\,x_j+ & \cdots & +a_{m,n}\,x_n & = & 1 \end{array} \right.$$

Il faut comprendre un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ de 0 et de 1 comme une description de l'ensemble des interrupteurs qui seront actionnés : x_j vaut 1 si l'interrupteur j est actionné, 0 sinon. Les coefficients $a_{i,j}$ décrivent l'effet des interrupteurs sur les ampoules : $a_{i,j}$ vaut 1 si l'interrupteur j actionne l'ampoule i, 0 sinon. Le premier membre de la ligne i décrit l'effet de la combinaison d'interrupteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ sur l'ampoule i :

[1] Je dois cet exemple à Michel Burlet.

$a_{i,1}\,x_1 + \cdots + a_{i,n}\,x_n$ vaut 1 si l'ampoule i est finalement allumée, 0 si elle est éteinte. Tous les termes du second membre sont égaux à 1, car on souhaite que toutes les ampoules soient allumées à la fin.

Voici le système correspondant à la figure 3.

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & +x_5 & = & 1 \\ & x_2 & +x_3 & +x_4 & & = & 1 \\ & & x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & & +x_4 & +x_5 & = & 1 \end{array}\right. \tag{7}$$

Vous pouvez vérifier que $x = (1,1,0,0,1)$ est solution (dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) : actionner les interrupteurs 1, 2 et 5 allume bien toutes les ampoules dans la figure 3.

Si le graphe est trop compliqué pour deviner la solution, comment la calculer ? Par la méthode du pivot de Gauss bien sûr ! Ce qui a été exposé pour les matrices à coefficients réels, vaut pour $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si on applique la méthode du pivot de Gauss au système (7), on vérifie qu'il est de rang 5, donc $(1,1,0,0,1)$ est l'unique solution. Dans ce cas particulier, le système a une solution unique pour tout second membre. Donc quelle que soit la configuration d'ampoules allumées et éteintes que l'on souhaite atteindre, il y a un ensemble d'interrupteurs et un seul que l'on doit actionner pour atteindre la configuration souhaitée.

Ce n'est pas toujours le cas. Le graphe complet à n sommets est tel que deux sommets quelconques sont toujours reliés par une arête. Sur un graphe complet, basculer un interrupteur quelconque allume ou éteint toutes les ampoules à la fois. Si on commence au début par toutes les ampoules éteintes, la seule autre configuration que l'on puisse atteindre est celle où tout est allumé. Dans ce cas, tous les coefficients $a_{i,j}$ du système sont égaux à 1, son rang est 1, et le système n'a de solution que si tous les coefficients du second membre sont égaux.

Le miracle est que si tous les coefficients du second membre sont égaux à 1, le système a toujours au moins une solution : quel que soit le graphe, il y a toujours un ensemble d'interrupteurs à actionner pour allumer toutes les ampoules.

Théorème 5. *Pour tout graphe à n sommets, le système (S) a au moins une solution.*

Démonstration : Appliquons la méthode du pivot de Gauss au système (S). On le transforme en prenant des combinaisons linéaires des lignes, jusqu'à le mettre sous forme échelonnée. Si le rang du système est n, il n'y aura pas d'équation de compatibilité : le système se résout, et on trouve une solution unique. Mais si le rang est inférieur à n, la méthode du pivot de Gauss fait apparaître une combinaison linéaire des équations dont le premier membre est nul. Or nous sommes dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$: les coefficients d'une combinaison linéaire ne peuvent être que 0 ou 1. Donc une combinaison linéaire est forcément une somme. Que se passe-t-il quand une somme de lignes, disons $L_{i_1} + \cdots + L_{i_k}$ a un premier membre nul ? Cela implique en particulier que chacun des sommets $i_1, \ldots, i_k$ a un nombre impair de voisins parmi les autres sommets du même ensemble $i_1, \ldots, i_k$. Si on restreint le graphe à ces sommets, on obtient un sous-graphe, tel que le nombre de voisins de chaque sommet est impair. Or dans un graphe ayant un nombre impair de sommets, il y a toujours un sommet dont le nombre de voisins est pair (ce n'est pas facile à démontrer : réflechissez !). Si tous les sommets parmi $i_1, \ldots, i_k$ ont un nombre impair de voisins, alors k est pair. Donc si $L_{i_1} + \cdots + L_{i_k}$ a un premier membre nul, alors nécessairement k est un entier pair. Pour appliquer la méthode du pivot de Gauss, on doit effectuer les mêmes transformations à la fois sur le premier membre et sur le second. Or le second ne contient que des 1. La somme dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d'un nombre pair de 1 donne 0. Ceci entraîne que si la forme échelonnée contient une équation dont le premier membre est nul, alors le second membre de cette même équation est nul également. Donc le système a une solution. $\square$

Le théorème 2 entraîne que l'ensemble des solutions est en bijection avec un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. Un sous-espace vectoriel de dimension k dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ a 2^k éléments. Le nombre de solutions est donc nécessairement une puissance de 2. Pour le graphe de la figure 4, vous pouvez calculer les solutions par la méthode du pivot de Gauss, et vérifier qu'il y en a 2.

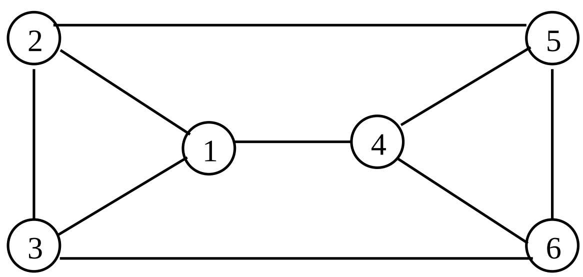


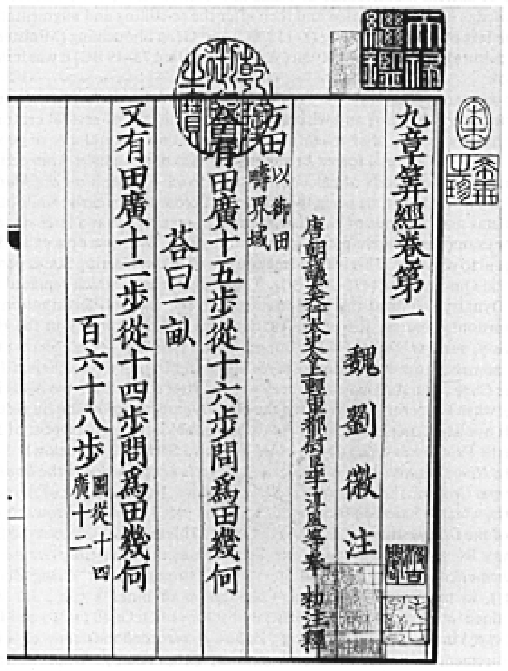
FIG. 4 – Graphe à 6 sommets et 9 arêtes.

3.3 Les Neuf Chapitres

La méthode du pivot de Gauss... est née en Chine ! Sa plus ancienne utilisation se trouve dans les « Neuf Chapitres sur l'Art du Calcul » (figure 5). L'auteur de ce recueil de 246 problèmes est inconnu, tout comme la date à laquelle il a été écrit, que certains auteurs placent en 152 avant J.-C., d'autres au premier siècle après J.-C.

Voici le contenu des neuf chapitres.

1. *Champs rectangulaires pour traiter les territoires des terres cultivées* : calcul fractionnaire, calculs d'aires.
2. *Petit mil et grains décortiqués pour traiter les échanges et les transformations* : proportionnalité, règle de trois.



九章筭經卷第一

魏 劉徽 注

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 勅注釋

方田 以御田疇界域

今有田廣十五步從十六步問爲田幾何

荅曰一畝

又有田廣十二步從十四步問爲田幾何

百六十八步 圖從十四廣十二

FIG. 5 – La première page des « Neuf Chapitres sur l'Art du Calcul ».

3. *Parts pondérées en fonction des degrés pour traiter le cher et le bon marché, les distributions de grains et les impôts* : partages proportionnels et inversement proportionnels.
4. *Petite largeur pour traiter les nombres-produits et les aires, du carré et du cercle* : connaissant une aire ou un volume, trouver un élément de la figure concernée (côté du carré, côté du cube, circonférence du cercle, diamètre de la sphère). On y trouve en particulier des algorithmes d'extraction de racines carrées et cubiques. La valeur utilisée pour π est 3.
5. *Discuter des travaux pour traiter les règles concernant les travaux de terrassement et les volumes* : volumes de prismes, de cônes et de troncs de cônes, de pyramides et de troncs de pyramide, de tétraèdres.
6. *Paiement de l'impôt de manière égalitaire en fonction du transport pour traiter travaux et dépenses selon la distance* : partages proportionnels, calculs de distances, progressions arithmétiques.
7. *Excédent et déficit pour traiter de comment les choses cachées et mêlées se font apparaître mutuellement* : méthode de fausse position (construction d'intervalles emboîtés pour approcher un zéro d'une fonction).
8. *Disposition rectangulaire pour traiter ce qui est mélangé ainsi que le positif et le négatif* : résolution de systèmes linéaires par la méthode du pivot de Gauss. Parmi les problèmes on trouve des systèmes de 6 équations à 6 inconnues.

9. *Base et hauteur pour traiter le haut et le profond, le large et le lointain* : calculs de distances utilisant le théorème de Pythagore.

Les « Neuf Chapitres » furent ignorés des occidentaux jusqu'à une date récente. Des résolutions de systèmes linéaires apparaissent sur les tablettes d'argile babyloniennes, et ils se retrouvent dans toute la littérature mathématique depuis l'antiquité. C'est bien Carl Friedrich Gauss (1777-1855) qui a pour la première fois formalisé la méthode du pivot en toute généralité, dans un mémoire de 1810 sur l'orbite de l'astéroïde Pallas. Quittant l'astronomie pour la géodésie, il se trouva plus tard confronté à un problème de triangulation de la région de Hanovre, qui impliquait 26 triangles : même Gauss ne pouvait pas résoudre à la main des systèmes de plusieurs dizaines d'équations. Il mit alors au point un algorithme de calcul approché, qui fut redécouvert par Philipp Ludwig von Seidel (1821-1896) en 1874 (ce dernier avait un système de 72 équations à résoudre). L'algorithme de Gauss-Seidel est utilisé de nos jours pour de très grands systèmes.

3.4 Les grands systèmes

Même si aucun des systèmes résolus dans le cours ne dépassait 4 inconnues, on demande couramment aux ordinateurs de résoudre des systèmes à plusieurs millions d'inconnues. D'où viennent-ils ?

La physique fournit toute une famille d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles qui décrivent avec une précision étonnante les phénomènes auxquels elles s'appliquent : équation de Maxwell, de Schrödinger, d'Euler, de Navier-Stokes... A titre d'exemple, voici la plus célèbre des équations aux dérivées partielles, l'équation de la chaleur. Considérons un corps homogène dans l'espace, et notons $f(t,x,y,z)$ la température au temps t du point de coordonnées (x,y,z). L'application f est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho C_p}\left(\frac{\partial f^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) .$$

où λ est la conductivité thermique, ρ la masse volumique et C_p la chaleur spécifique. L'application suivante porte le nom de « noyau de la chaleur » car elle est solution de l'équation de la chaleur, ce qui se vérifie facilement.

$$f(t,x,y,z) = \frac{1}{t\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{c}{t}(x^2+y^2+z^2)\right) ,$$

où $c = \frac{\rho C_p}{4\lambda}$.

Il est extrêmement rare qu'une équation différentielle admette une solution explicite comme celle-ci, et quand c'est le cas, la solution trouvée correspond à des conditions qui ne sont pas physiquement réalistes. Il n'y a en général pas d'autre recours que de résoudre l'équation de manière approchée par un *algorithme de discrétisation*. L'idée consiste à approcher les dérivées de la fonction inconnue par ses accroissements sur un pas de discrétisation, choisi suffisamment petit.

Pour être plus précis, nous allons prendre comme exemple l'équation de la chaleur en dimension 1. Considérons une tige homogène, et notons $f(t,x)$ sa température à l'instant t et à l'abscisse x.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho C_p}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\;.$$

Choisissons un pas de temps δt et un pas d'espace δx (petits). A l'instant t, nous approchons la dérivée partielle en temps par le taux d'accroissement sur un intervalle de longueur δt :

$$\frac{\partial f}{\partial t} \simeq \frac{1}{\delta t}\Big(f(t+\delta t,x) - f(t,x)\Big)\;.$$

De même la dérivée partielle seconde en espace est approchée par une différence d'accroissements, soit :

$$\frac{\partial f^2}{\partial x^2} \simeq \frac{1}{(\delta x)^2}\Big((f(t,x+\delta x) - 2f(t,x) + f(t,x-\delta x)\Big)\;.$$

On ne conserve que les instants et les abscisses qui sont des multiples entiers de δt et δx. Posons donc, pour tout couple d'entiers i,j,

$$f_{i,j} = f(i\delta t, j\delta x)\;.$$

L'équation de la chaleur est remplacée par un système linéaire d'équations reliant entre elles les inconnues $f_{i,j}$:

$$\frac{1}{\delta t}\Big(f_{i+1,j} - f_{i,j}\Big) = \frac{\lambda}{\rho C_p}\,\frac{1}{(\delta x)^2}\Big(f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}\Big)\;.$$

Pour arriver à un système lisible, simplifions encore. Prenons une barre en équilibre thermique, dont la température est fixée à a à l'abscisse 0 et b à l'abscisse $(n+1)\delta x$, Calculons sa température à l'abscisse $i\delta x$, pour $i = 1,\ldots,n$. Puisque l'équilibre thermique est atteint, nous cherchons une fonction constante en temps, c'est-à-dire telle que $\partial f/\partial t = 0$. Notons f_i la valeur approchée de la température au point $i\delta x$ de la barre. Le système dont les f_i sont solution est le suivant.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2f_1 - f_2 & = & a \\ & \vdots & \\ -f_{i-1} + 2f_i - f_{i+1} & = & 0 \\ & \vdots & \\ -f_{n-1} + 2f_n \qquad & = & b \end{array}\right.$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que ce système admet une solution unique, définie pour $i = 1,\ldots,n$ par

$$f_i = a + (b-a)\frac{i}{n+1}\;.$$

Ceci correspond bien au fait qu'une fonction telle que $f''(x) = 0$ est un polynôme de degré 1 : $f(x) = \alpha x + \beta$.

Chacune des équations du système ci-dessus contient relativement peu de termes non nuls : on dit que le système est *creux*. C'est le cas en général pour les systèmes obtenus après discrétisation d'un problème différentiel. Ceci facilite le stockage en mémoire, et accélère la résolution, grâce à la mise au point d'algorithmes adaptés. Il reste ensuite à démontrer que la solution du système linéaire approche bien la solution du problème différentiel, en un sens qu'il faudrait préciser. Ceci fait l'objet de théorèmes de convergence que nous n'aborderons pas.

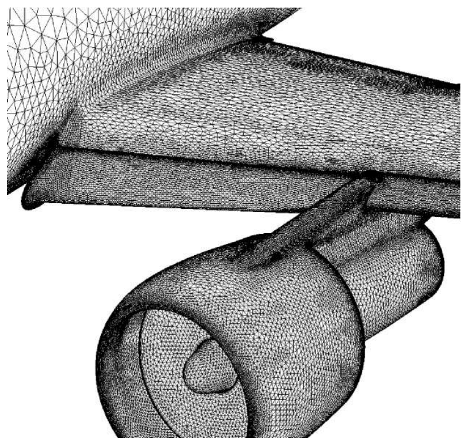


FIG. 6 – Exemple de maillage.

L'équilibre thermique d'une barre n'a évidemment que peu d'intérêt pratique. Pour un bâtiment en construction, prévoir la puissance de la chaufferie et calculer la consommation d'énergie sont des problèmes nettement plus concrets. Or les volumes à chauffer ont 3 dimensions. Pour peu qu'on souhaite 100 pas de discrétisation dans chacune des trois dimensions, on arrive à un système certes linéaire, mais qui a déjà un million d'inconnues. Des moyens de découper l'espace plus astucieusement que par des petits cubes ont été inventés. On les appelle des *maillages*. Vous en voyez parfois dans les « making of » des films d'animation, où ils sont utilisés pour rendre les mouvements plus réalistes. Vous les voyez aussi sur des présentations de voitures ou d'avions : ils sont utilisés pour calculer par l'équation de Navier-Stokes l'écoulement de l'air autour de la carrosserie, et donc prédire la portance de l'avion ou la consommation de la voiture.