Corrigé de l'exercice 2-10

Avant de commencer, quelques remarques sur ce type d'exercice sur les ensembles :

- Attention à ne pas mélanger les connecteurs logiques et les opérations sur les ensembles !
  Les connecteurs logiques s'appliquent exclusivement aux assertions mathématiques. Par exemple, si A et B sont deux ensembles, on ne peut pas écrire "$A \Leftrightarrow B$" – ça ne veut rien dire. Si on veut signifier que les ensembles A et B sont égaux, on écrit "$A = B$". Si on veut utiliser le connecteur logique $\Leftrightarrow$ pour dire que A et B sont égaux, on peut écrire
  $$(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B) \quad (x \text{ est dans } A \text{ si et seulement s'il est aussi dans } B).$$
- Un dessin (diagramme de Venn) n'est **PAS** une justification. On ne peut donc pas prouver une égalité entre deux ensembles en s'appuyant juste sur un dessin. Ces diagrammes sont juste là pour aider à visualiser la situation, pour chercher un piste ou vérifier un résultat !

Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties de E. On appelle
- **la *différence de B dans A*, et on note $A \setminus B$, l'ensemble $A \cap ({}^cB)$,**
- **la *difference symétrique de A et B*, et on note $A\Delta B$, l'ensemble $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.**

1. **Ecrire sous forme logique les assertions $x \in A \setminus B$ et $x \in A\Delta B$.**

$$\begin{aligned}(x \in A \setminus B) \quad &\Leftrightarrow \quad (x \in A \cap ({}^cB)) \quad \Leftrightarrow \quad ((x \in A) \wedge (x \in ({}^cB)))\\ &\Leftrightarrow \quad ((x \in A) \wedge \neg(x \in B))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x \in A\Delta B) \quad &\Leftrightarrow \quad (x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \quad \Leftrightarrow \quad ((x \in (A \setminus B)) \vee (x \in (B \setminus A))\\ &\Leftrightarrow \quad ((x \in A) \wedge \neg(x \in B)) \vee ((x \in B) \wedge \neg(x \in A))\end{aligned}$$

2. **Démontrer que $A \setminus \emptyset = A\Delta\emptyset = A$.**

Méthode 1 : avec les connecteurs logiques.
On a d'une part (en utilisant la question précédente) :
$$(x \in (A \setminus \emptyset)) \quad \Leftrightarrow \quad ((x \in A) \wedge \neg(x \in \emptyset)) \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A),$$
où on utilise le fait que l'assertion $\neg(x \in \emptyset)$ est toujours vraie. D'autre part, on a
$$(x \in (A\Delta\emptyset)) \quad \Leftrightarrow \quad ((x \in A) \wedge \neg(x \in \emptyset)) \vee ((x \in \emptyset) \wedge \neg(x \in A))$$
ce qui est équivalent à $(x \in A)$, puisque (comme on vient de le voir) $\neg(x \in \emptyset)$ est toujours vrai, et que $(x \in \emptyset)$ est toujours faux.

Méthode 2 : avec les opérateurs sur les ensembles.
On a d'une part
$$A \setminus \emptyset = A \cap ({}^c\emptyset) = A \cap E = A,$$
et d'autre part
$$A\Delta\emptyset = (A \cap ({}^c\emptyset)) \cup (\emptyset \cap ({}^cA)) = A \cup \emptyset = A,$$
où la dernière égalité utilise le fait que, pour toute partie F de E, on a $\emptyset \cap F = \emptyset$.

3. **Démontrer que $A \setminus A = A\Delta A = \emptyset$.**

   Méthode 1 : avec les connecteurs logiques.
   On a d'une part (en utilisant la question 1) :

$$(x \in (A \setminus A)) \quad \Leftrightarrow \quad ((x \in A) \wedge \neg(x \in A))\,,$$

   autrement dit, $x \in (A \setminus A)$ si et seulement s'il vérifie à la fois $x \in A$ ET $x \notin A$, ce qui est impossible. L'ensemble $A \setminus A$ ne contient donc aucun élément : $A \setminus A = \emptyset$. D'autre part, on a

$$(x \in (A\Delta A)) \quad \Leftrightarrow \quad ((x \in A \wedge \neg(x \in A)) \vee ((x \in A) \wedge \neg(x \in A))\,,$$

   ce qui est là encore impossible : on a donc $A\Delta A = \emptyset$.

   Méthode 2 : avec les opérateurs sur les ensembles.
   On a d'une part :

$$A \setminus A = A \cap ({}^c A) = \emptyset,$$

   et d'autre part

$$A\Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

4. **Démontrer que $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.**

   On a d'une part

$$A\cap(B\Delta C) = A\cap\big((B\setminus C)\cup(C\setminus B)\big) = A\cap\big((B\cap({}^cC))\cup(C\cap({}^cB))\big) = \big((A\cap B\cap({}^cC))\cup(A\cap C\cap({}^cB))\big).$$

   D'autre part, on a

$$(A \cap B)\Delta(A \cap C) = \big((A \cap B) \cap ({}^c(A \cap C))\big) \cup \big((A \cap C) \cap ({}^c(A \cap B))\big).$$

   On observe que

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cap ({}^c(A \cap C)) &= (A \cap B) \cap (({}^cA) \cup ({}^cC)) = B \cap \big(A \cap (({}^cA) \cup ({}^cC))\big)\\ &= B \cap \big((A \cap ({}^cA)) \cup (A \cap ({}^cC))\big) = B \cap \big(\emptyset \cup (A \cap ({}^cC))\big)\\ &= A \cap B \cap ({}^cC),\end{aligned}$$

   et de même on a $(A \cap C) \cap ({}^c(A \cap B)) = A \cap C \cap ({}^cB)$.
   Ceci montre donc que $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$. Cet ensemble peut être représenté sur un diagramme de Venn :