DAEU - B / Maths

Mardi 3 Novembre 2020

(partie 2)

Exercice : simplifier (avec la def. de la valeur absolue) :

- $a(x) = |x| + x$
- $b(x) = |x - 1|$
- $c(x) = |x^2 - 1|$.

- $a(x) = |x| + x = \begin{cases} x + x & , \text{ si } x \geq 0 \\ -x + x & , \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$

donc : $a(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

• $b(x) = |x-1|$. On a : $x-1 \geq 0 \iff x \geq 1$

donc $b(x) = \begin{cases} x-1 & , \text{ si } x \geq 1, \\ -x+1 & , \text{ si } x \leq 1. \end{cases}$

• $c(x) = |x^2-1|$. ? Quand est-ce que $x^2-1 \geq 0$?

poly deg. 2 ($a>0$)

On sait que $x^2-1=0 \iff x^2=1 \iff \boxed{x=-1 \text{ ou } x=1}$

cf 1° partie du Cours

donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc : $c(x) = \begin{cases} -(x^2)+1 & , \text{ si } x \in [-1;1] \\ x^2-1 & \text{ sinon} \end{cases}$

⑧ Fonction PARTIE ENTIÈRE

$E(x) \longleftarrow$ donne "l'entier avant x".

Ex :

$$\boxed{\begin{aligned} E(2{,}43) &= 2. \\ E(0{,}99) &= 0 \\ E(-1{,}3) &= -2 \end{aligned}}$$

(fonction "plancher")

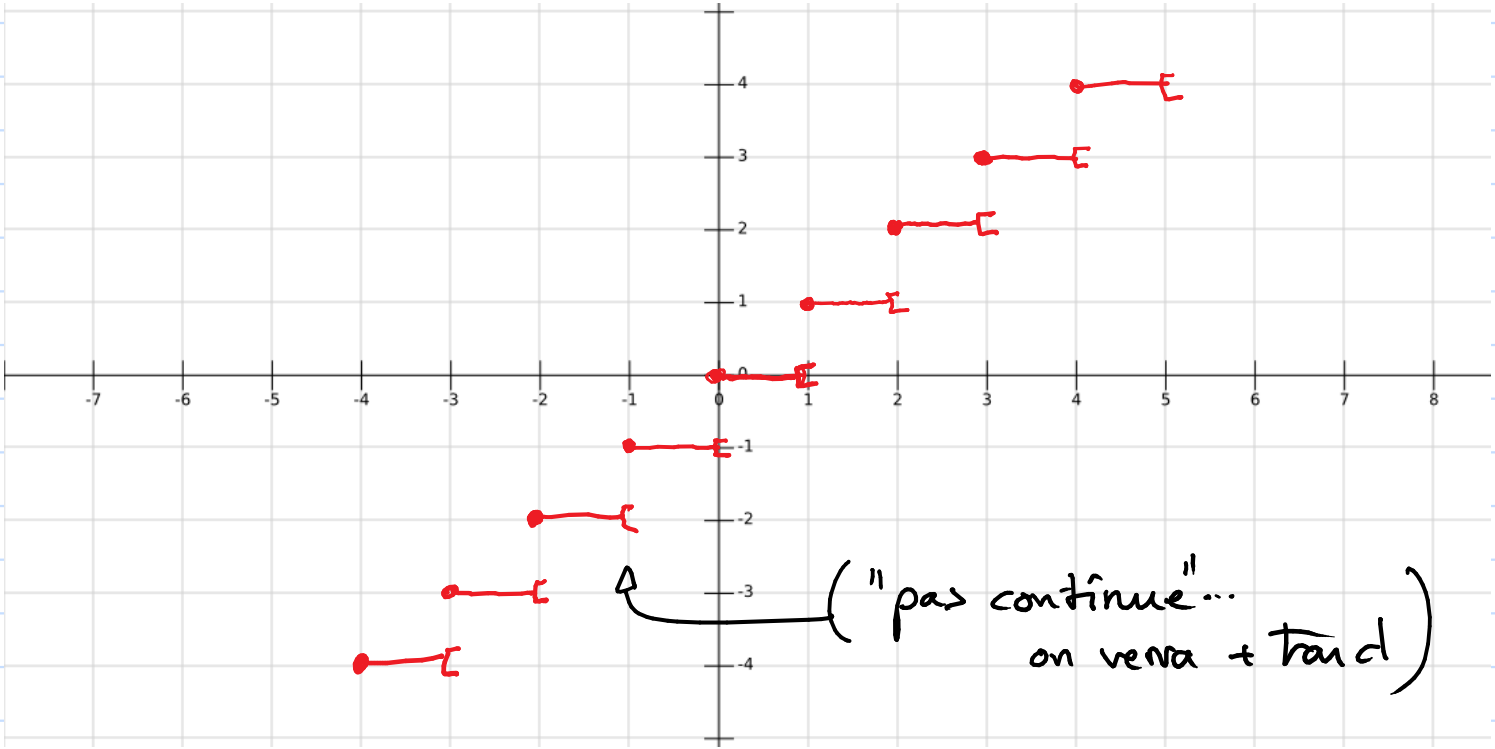
En général, on définit $E(x)$ par :

$$\boxed{E(x) \leq x < E(x) + 1}$$

- $D_E = \mathbb{R}$

Rem : $E(3) = 3$
$E(-4) = -4$

* Graphe de $E(x)$



- $E(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$

  mais <u>PAS</u> strictement croissante

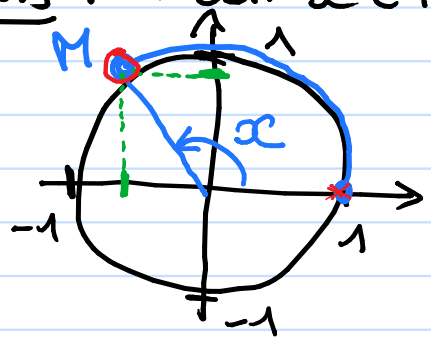
  (car a des "niveaux constant")

9) Fonctions trigonométriques.

$\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Rappels : . Soit $x \in \mathbb{R}$ un angle (en radians)

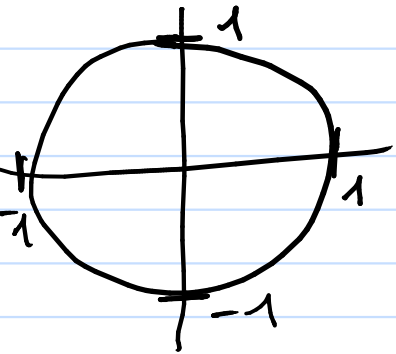
un point M sur le cercle trigo.



Déf :

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(x) = \text{l'abscisse de } M \\ \sin(x) = \text{l'ordonnée de } M \end{array}}$$

<u>Vu</u> : pour tout $x \in \mathbb{R}$



* $\boxed{\begin{array}{l} 1 \geqslant \cos(x) \geqslant -1 \\ 1 \geqslant \sin(x) \geqslant -1 \end{array}}$

* $\boxed{(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1}$

<u>Notation</u> : On note aussi

. $\cos^2 x = (\cos x)^2$

. $\sin^2 x = (\sin x)^2$

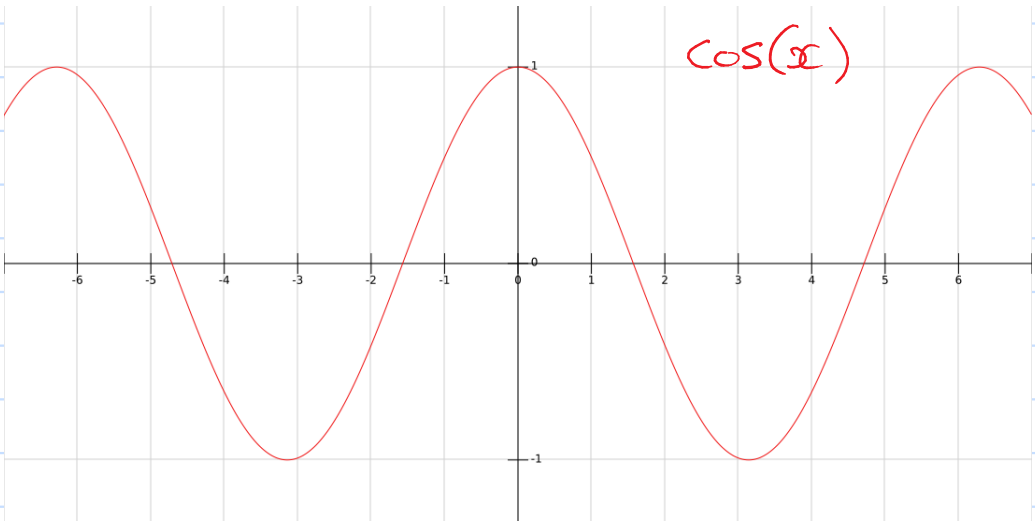
<u>donc</u> : $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

* on a donc les 2 fonctions, définies sur $\mathbb{R}$

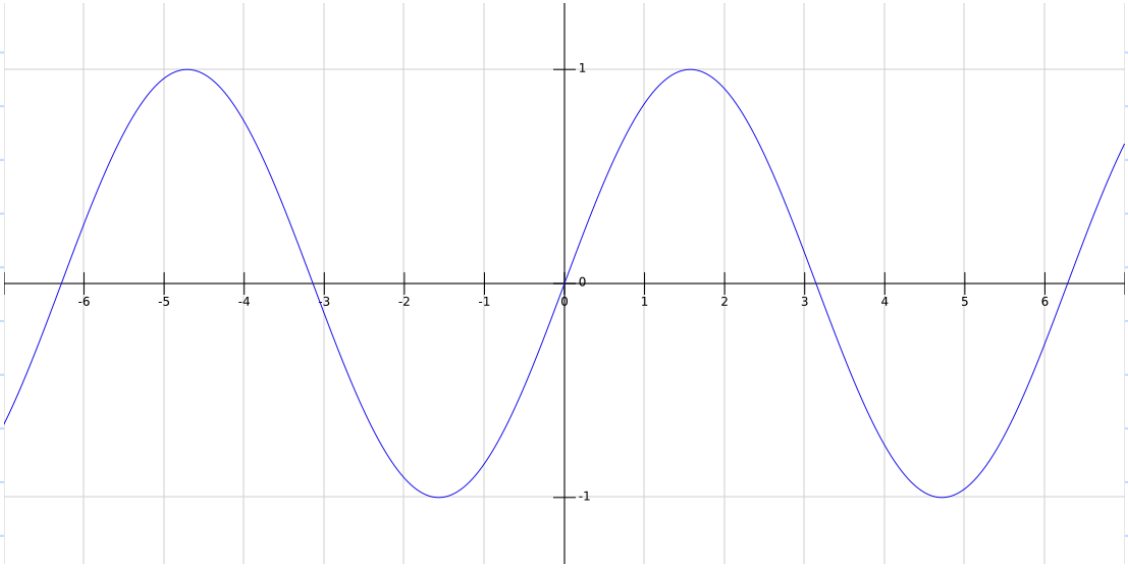
ens. de définition.

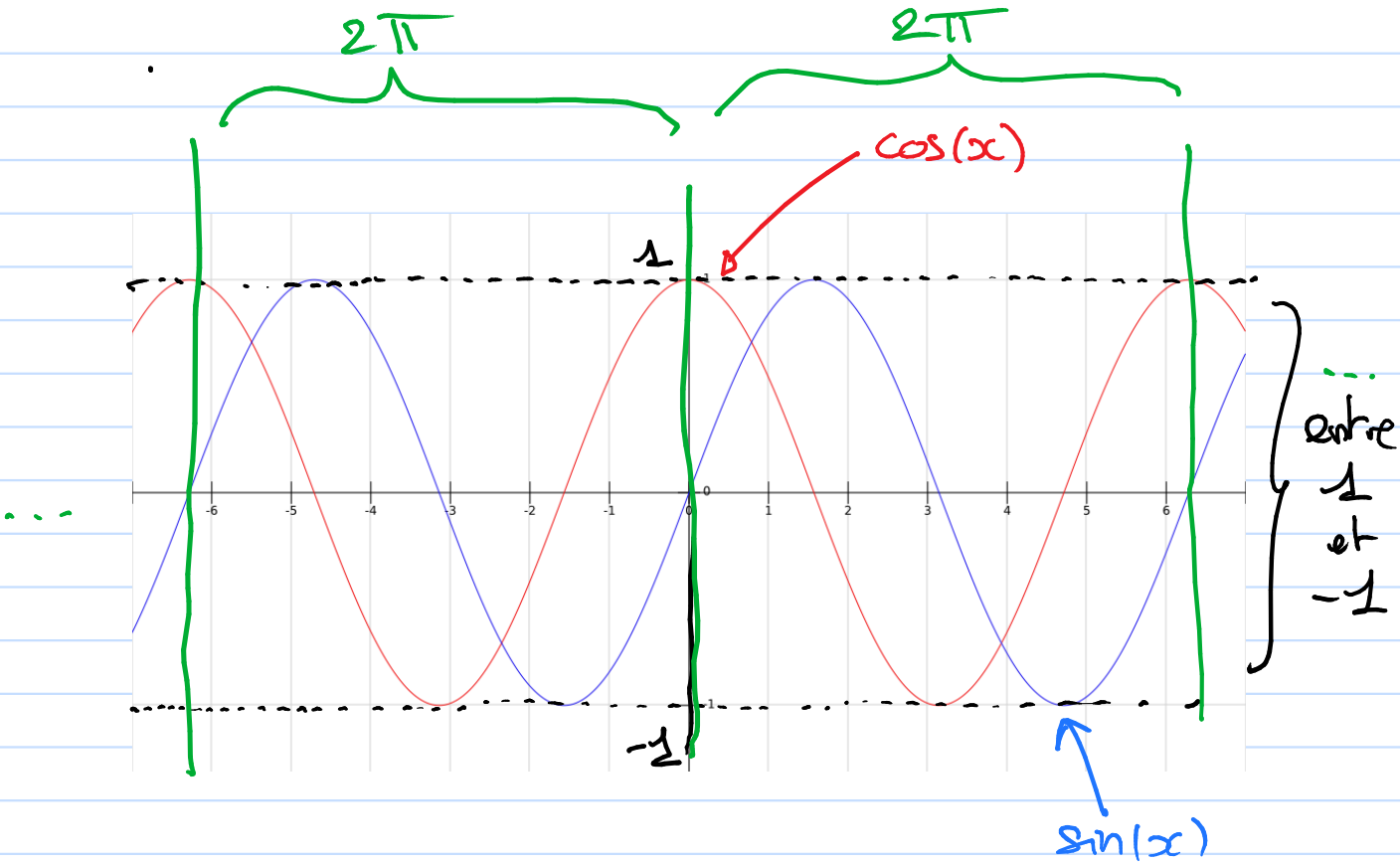
- $\cos(x)$
- $\sin(x)$

* Graphe de ces fonctions ?



Graphe de $\sin(x)$:



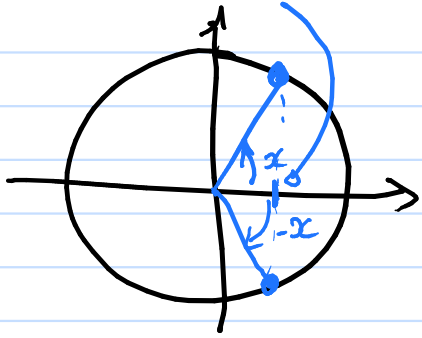

2π
2π
cos(x)
1
-1
entre 1 et -1
sin(x)

* <u>Parité</u> :

→ cosinus est PAIR :

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

(graphe sym / axe vertical



→ sinus est IMPAIR

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

(graphe sym / origine

* "Periodicité"

2π ← un tour complet sur le cercle trigo

donc :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(x) &= \cos(x+2\pi) \\ \sin(x) &= \sin(x+2\pi) \end{aligned}}$$

← car x et $x+2\pi$ donnent le même point !

On dit que ces fonctions sont PERIODIQUES, de période 2π.

Graphiquement : le graphe "se répète indéfiniment".

(voir 2 pages avant)

Exemples :

① Ens. de définition de

- $f(x) = \sqrt{\cos(x) + 1}$ ← racine carrée
- $g(x) = \dfrac{1}{\sin(x) - 2}$
- $h(x) = \dfrac{1}{1 + \cos(x)}$

← dénominateur ...

=

- Pour $f(x)$, il faut que $\cos(x) + 1 \geq 0$.

On sait que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \geq -1$

donc $\boxed{\cos(x) + 1 \geq 0}$

donc pas de V.I : $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

- pour $g(x) = \dfrac{1}{\sin x - 2}$,

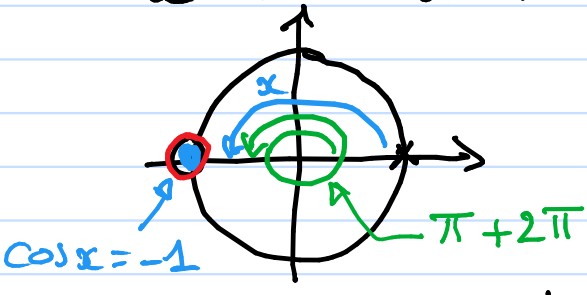
  x est v.I. si : $\sin x - 2 = 0 \iff \sin x = 2$.

  <u>Or</u> $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $\sin x \neq 2$.

  $\hookrightarrow$ pas de v.I. $D_g = \mathbb{R}$.

• pour $h(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$. || A REPRENDRE : c'est Exo 16

x est V.I. si $1+\cos x = 0 \iff \cos x = -1$ ... ce qui peut arriver.



c'est le cas pour

$x = \pi$ (180°)

mais aussi pour

$x = \pi + \underbrace{1 \text{ tour complet}}_{2\pi}$

et pour

$x = \pi + \underline{\underline{k}}$ tours complets $(k \in \mathbb{Z})$

Une infinité de valeurs interdites

c-à-d : $\boxed{x = \pi + k \times 2\pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$$\boxed{D_h = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\}}$$

Un dernier exemple d'exo pour la route :

- Parité de

$$f(x) = \cos(x^2).$$

$\boxed{\text{composée}}$ de la fonction carrée par la fonction cosinus.

on écrit $f(-x)$: $(-x)^2 = x^2$

$$f(-x) = \cos((-x)^2) = \cos(x^2) = f(x).$$

donc f est PAIRE.

. Parité de $g(x) = \cos(x^3)$?

on écrit $g(-x)$:

$$g(-x) = \cos\left((-x)^3\right) = \cos\left(-(x^3)\right)$$

Cube est IMPAIRE : $(-x)^3 = -x^3$

et

cosinus est Paire : $\cos\left(-(x^3)\right) = \cos(x^3)$

donc :

$$g(-x) = \cos(x^3) = g(x) .$$

donc g est PAIRE //