DAEU-B / Maths

- Mardi 8 Décembre -

Rappel du Cours sur la CONTINUITÉ

→ **Def** : • f fonction et $a \in D_f$.

f est CONTINUE en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

[Graphiquement : pas de 'saut' / 'trou' dans C_f]

• f est continue sur un intervalle I ← $[a;b]$ ou $]-\infty;a[$ ou $\mathbb{R}$ ...

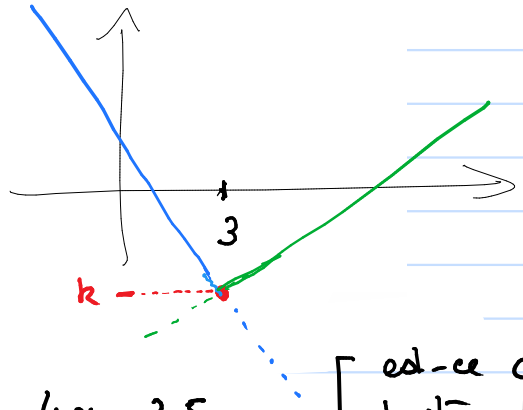
si f est continue en tout pt. de I.

Exercice n° 3

Déterminer la valeur k pour laquelle la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, où f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -5x+2, & \text{si } x < 3. \\ k & \text{si } x = 3. \\ 4x-25, & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

$\leftarrow f(3) = k$



2 questions :

① est ce que

$$\underbrace{\lim_{x \to 3^-} -5x+2}_{} = \underbrace{\lim_{x \to 3^+} 4x-25}_{}$$

$$\lim_{x \to 3^-} -5x+2 = -5 \times 3 + 2 = -15 + 2 = -13$$

$$\lim_{x \to 3^+} 4x-25 = 4 \times 3 - 25 = 12 - 25$$

[est-ce que les droites bleues et vertes se recollent bien ?]

$\boxed{\text{oui}}$.

② Quelle valeur pour k pour que f soit continue ?

dans ① on a vu : $\lim_{3^-} f(x) = \lim_{3^+} f(x) = -13 = \lim_{3} f(x)$

Or $k = f(3)$: il faut prendre $k = -13$

$f(3) = \lim_{3} f(x)$

Même question pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} (2x+1)^3, & \text{si } x < -1. \\ 5x+4 & \text{si } -1 \leq x \leq 5. \\ k, & \text{si } x > 5. \end{cases}$

Il y a 2 questions : ① f continue en -1 ?
② f continue en 5 ?

① . $\lim\limits_{-1^-} f(x) \overset{?}{=} \lim\limits_{-1^+} f(x)$ (sachant $f(-1) = 5(-1)+4 = -1$)

$\lim\limits_{-1^-} (2x+1)^3 = (2(-1)+1)^3 = (-1)^3 = (-1)$

$\lim\limits_{-1^+} 5x+4 = (-1)$

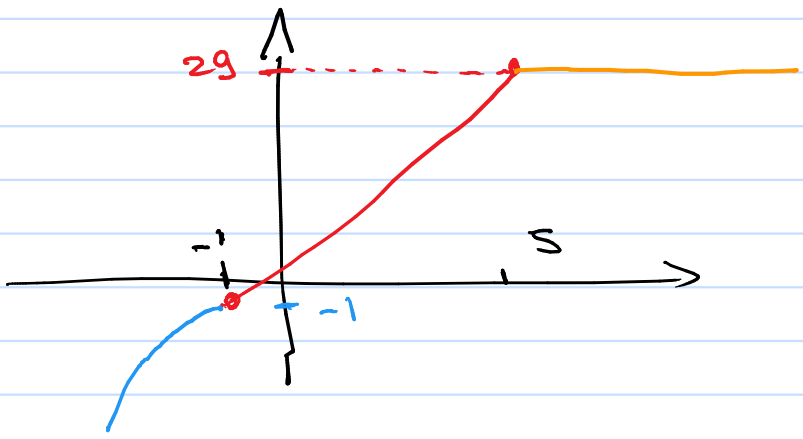
f est donc continue en -1

② $\lim\limits_{5^-} f(x) = \lim\limits_{5^-} 5x+4 = 5 \times 5 + 4 = 29$

$\lim\limits_{5^+} f(x) = \lim\limits_{5^+} k = k$

donc OK si on prend $\boxed{k = 29}$

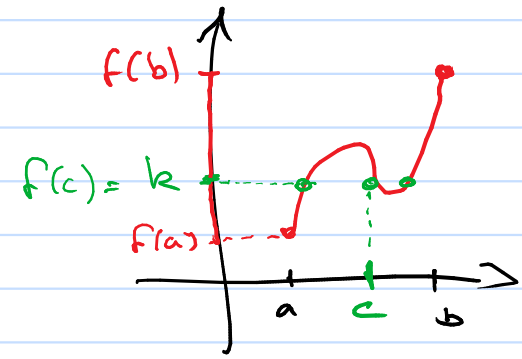
Graphiquement :



Rappels (Suite)

• Thm des Valeurs Intermédiaires (T.V.I.)

Si f continue sur $[a,b]$,
alors pour toute valeur "intermédiaire" k entre $f(a)$ et $f(b)$,
il existe au moins
un nb $c \in [a,b]$ tq : $f(c) = k$.



Rem 1 : toujours VRAI si $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$
en remplaçant $\begin{cases} f(a) \text{ par } \lim\limits_{-\infty} f(a) \\ f(b) \text{ par } \lim\limits_{+\infty} f(x) \end{cases}$.

(cf Ex. 4).

Rem 2 : Si, de plus, f est strictement monotone
alors, pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$,
il existe un UNIQUE $c \in [a,b]$
tq $f(c) = k$

Exercice n° 5

Démontrer que l'équation $\frac{12}{x} - x^2 = 1$ ($f(x) = 1$) a une solution et une seule dans $]0, +\infty[$, comprise entre 2 et 3.

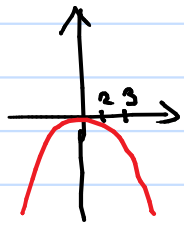
Il faut utiliser le T.V.I. avec $[a, b] = [2; 3]$.

et $f(x) = \frac{12}{x} - x^2$.

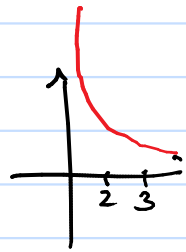
Pour cela, il faut vérifier que :

① f continue sur $[2;3]$: OK, car la fonct° inverse, la fonct° carrées sont continues (fct° ref).

② "$-x^2$" est strict^t ↘ sur $[2;3]$



de même que "$\frac{12}{x}$" puisque la fct° inverse est strictement ↘ sur $[2;3]$



donc f est strictement ↘ sur $[2;3]$.

donc

Le T.V.I. dit : pour toute valeur k entre $f(2)$ et $f(3)$, il existe un unique $c \in [a,b]$ tq $f(c) = k$

(c-à-d une unique solu° à cette équation).

Or :

$$\left\{\begin{array}{l} f(2) = \frac{12}{2} - 2^2 = 6 - 4 = 2 \\ f(3) = \frac{12}{3} - 3^2 = 4 - 9 = -5 \end{array}\right\}$$

$k = 1$ est bien entre $f(2)$ et $f(3)$

Exercice n° 7

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f, définie et continue sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

f est
- strictement $\nearrow$ sur $]-\infty;-1]$
- strictement $\searrow$ sur $[-1;0]$
- strictement $\nearrow$ sur $[0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ (on se rapproche de 0 sans l'atteindre)

a. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$?

b. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x)=-5$?

a. * Sur $\boxed{]-\infty;-1]}$, f est continue strict. croissante.

et $\lim\limits_{-\infty} f(x)=-\infty$ et $f(-1)=2$] ← (la valeur $k=0$ est entre $-\infty$ et 2)

cf Rem 1 page 5 : ici TVI avec $a=-\infty$

donc par le T.V.I. $f(x)=0$ a une unique sol sur $]-\infty;-1]$

* Sur $[-1;0]$, f est continue strictement décroissante.

et $f(-1)=2$ et $f(0)=-3$. Comme 0 entre 2 et -3,

par le T.V.I., $f(x)=0$ a une unique sol° sur $[-1;0]$

* Sur $[0,+\infty[$, f est strict° croissante, $\lim\limits_{+\infty} f(x)=0$

donc $f(x)<0$ pour tout $x\in[0;+\infty[$

* Conclusion : $f(x)=0$ a exactement 2 solutions.

(b. 1 seule solution pour $f(x)=-5$, qui est entre $-\infty$ et -1.)

Rappels (Complément et suite)

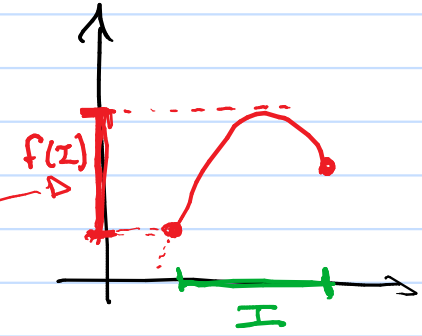
* Une conséquence du T.V.I.

▷ Si f est continue sur un intervalle I.

alors $f(I) = \left\{ \begin{array}{l} \text{l'ensemble des valeurs } f(x), \\ \text{pour tout } x \in I \end{array} \right\}$

est aussi un intervalle.

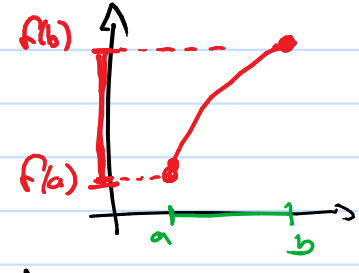
un "tronçon" sans trou.



En particulier,

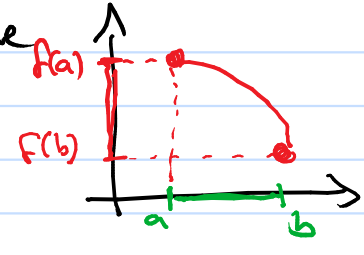
▷ si $I = [a ; b]$ et f continue et croissante

alors $f(I) = [f(a) ; f(b)]$ intervalle.



▷ si $I = [a, b]$, et f décroissante et continue

alors $f(I) = [f(b) ; f(a)]$ intervalle.



→ l'autre conséquence du T.V.I, vue la dernière fois :
NOTION de FONCTION RÉCIPROQUE.

▸ Si f est continue et strictement croissante (DÉCROISSANTE) sur $[a,b]$ (ou $]-\infty;b]$ ou $[a;+\infty[$ ou $\mathbb{R}$)
alors
elle admet une fonct° réciproque :

$$f^{-1} : [f(a);f(b)] \longrightarrow [a,b]$$
$[f(b);f(a)]$

telle que : . $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in [a,b]$

. $f(f^{-1}(x)) = x$ pour tout $x \in [f(a);f(b)]$
$[f(b);f(a)]$

Ex : • $f(x) = x^2$ sur $[0;+\infty[$
↳ réciproque $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

• $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$
↳ réciproque : $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Idée : par TVI, pour toute valeur $k \in [f(a);f(b)]$
il y a un unique $c \in [a,b]$ tq $\boxed{f(c) = k}$ $c^2 = k$

Ce que fait f^{-1} : donner cet unique antécédent :

$$\boxed{f^{-1}(k) = c} \qquad f^{-1}(9) = \sqrt{9} = 3$$

Exercice n° 10

On considère les fonctions

$$f(x) = \frac{1}{4}x + 3 \quad ; \quad g(x) = x^2 - 7 \quad ; \quad h(x) = \frac{x-1}{x+3}.$$

1 Justifier que chacune de ces fonctions admet une fonction réciproque, en précisant sur quel intervalle, et donner une formule pour sa fonction réciproque. 2

1) $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$. >0

1. f continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

donc elle admet une fct° réciproque

$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

2. On a : $f(k) = c \iff f^{-1}(c) = k$

On part de $f(k) = c \iff \frac{1}{4}k + 3 = c$

et on "isole" k $\iff \frac{1}{4} \cdot k = c - 3$

$\iff k = 4c - 12$

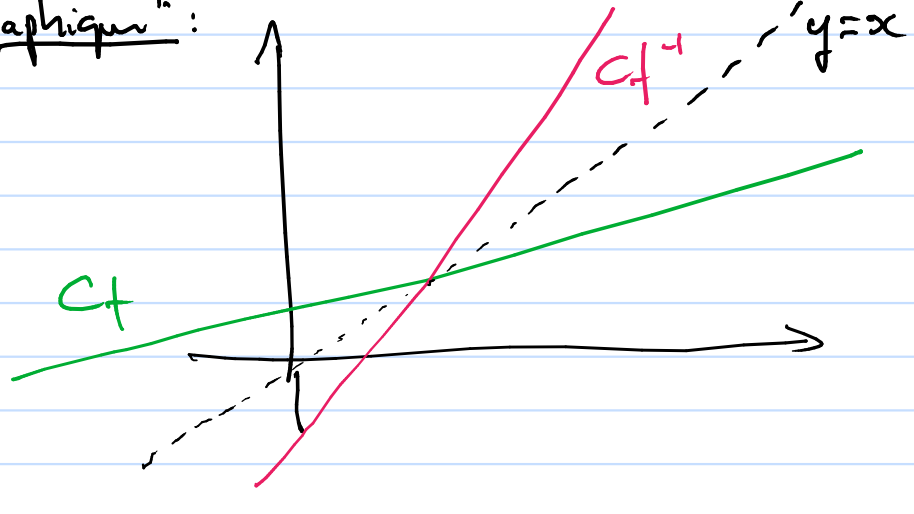
f construit c à partir de k

f^{-1} construit k à partir de c

la formule de $f^{-1}(c)$!

Conclu° : $\boxed{f^{-1}(x) = 4x - 12}$

Graphiqu° :



C_f et $C_{f^{-1}}$ toujours symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Exercice n° 10

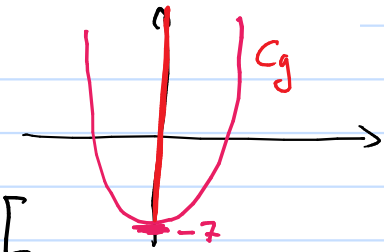
On considère les fonctions

$$f(x) = \frac{1}{4}x + 3 \quad ; \quad g(x) = x^2 - 7 \quad ; \quad h(x) = \frac{x-1}{x+3}.$$

1 Justifier que chacune de ces fonctions admet une fonction réciproque, en précisant sur quel intervalle, et donner une formule pour sa fonction réciproque.

2

Graphe :



① . g est continue et strictement $\nearrow$ sur $[0;+\infty[$

↳ admet une réciproque sur $[0;+\infty[$.

② Formule de g^{-1} : $g(k)=c \iff g^{-1}(c)=k$

or $g(k)=c \iff k^2-7=c$

$\iff k^2=c+7 \iff k=\sqrt{c+7}$

donc $\boxed{g^{-1}(x)=\sqrt{x+7}}$ ← $D_{g^{-1}} = [-7;+\infty[$

Rem : $g : [0;+\infty[\longrightarrow [-7;+\infty[$

$-7 = g(0)$; $+\infty = \lim_{+\infty} g(x)$

DONC

$g^{-1} : [-7;+\infty[\longrightarrow [0;+\infty[$

③ $h(x) = \dfrac{x-3}{x-2}$).

① justifier que h admet 1 fct° réciproque (sur 1 intervalle à préciser)

② Calculer la formule de h^{-1}. //

à savoir faire.

Pour ① il faut → h continue sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ ok.

→ strict° croissante / décroissante ?

difficile

Pour cela :

$$h(x) = \frac{x-3}{x-2} = \frac{(x-2)-1}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} - \frac{1}{x-2}$$

$$h(x) = 1 - \underbrace{\frac{1}{x-2}}_{\text{décroissant sur }]-\infty;2[\text{ et croissant sur }]2;+\infty[}$$

comme la fct° inverse.

donc

- h est st° CROISSANTE sur $]-\infty;2[$
- et strict° DECROISSANTE sur $\boxed{]2;+\infty[}$

Conc° : h admet une réciproque sur $]2;+\infty[$

② Formule de h^{-1} ?

② Réciproque de $h(x) = \dfrac{x-3}{x-2}$?

Idée : $h(k) = c \iff h^{-1}(c) = k$

$$h(k) = c \iff \frac{k-3}{k-2} = c \qquad \text{(But : isoler "k")}$$

$$\iff k-3 = c \times (k-2)$$

$$\iff k-3 = c \times k - 2c$$

$$\iff k - ck = 3 - 2c$$

$$\iff k \times (1-c) = 3 - 2c$$

$$\iff k = \frac{3-2c}{1-c} \quad \left(= \frac{2c-3}{c-1} \right)$$

Conc : $\boxed{h^{-1}(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}}$

Bilan de l'exo 10 :

$$f(x) = \frac{1}{4}x + 3 \xleftrightarrow{①} f^{-1}(x) = 4x - 12$$

$$g(x) = x^2 - 7 \xleftrightarrow{②} g^{-1}(x) = \sqrt{x+7}$$

$$h(x) = \frac{x-1}{x+3} \xleftrightarrow{③} h^{-1}(x) = \frac{2x-3}{x-1}$$

Vérifions :

① : $f(f^{-1}(x)) = f(4x-12)$

$$= \frac{1}{4}(4x-12) + 3$$

$$= \frac{4}{4}x - \frac{12}{4} + 3 = x - 3 + 3$$

$$= x \checkmark$$

de même, on peut vérifier que $f^{-1}(f(x)) = x$.

... la m̂ chose pour ② et ③.