

DAEU-B / Cath

- Lundi 7 Décembre -

Exercice n° 3 On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Soit A le point de coordonnées $(1; 5)$. Soient B et C les points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

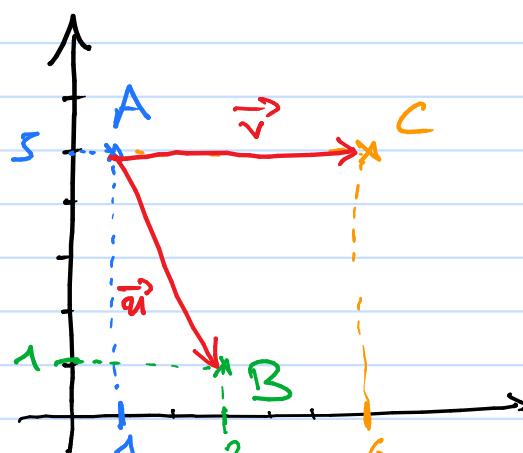
1. Faire une figure. Calculons les coord de B et C

2. Donner l'équation réduite de la droite (AB) .

3. Exprimer le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$ en fonction de \vec{u} et \vec{v} , montrer que $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, et calculer sa norme.

4. Calculer le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{w}$. Le triangle ABC est-il rectangle en C ?

5. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de C sur la droite (AB) .



Coord de B : $\overrightarrow{AB} = \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - 1 \\ y_B - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

donc $\begin{cases} x_B - 1 = 2 \\ y_B - 5 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 3 \\ y_B = 1 \end{cases}$

Coord de C (x_C, y_C) :

$$\overrightarrow{AC} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_C - 1 \\ y_C - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 6 \\ y_C = 5 \end{cases}$$

2) Équation de (AB).

Sachant $A(1; 5)$ et $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$
 $B(3; 1)$ un vecteur directeur !

- * $x_A \neq x_B$ donc (AB) non verticale et a équation réduite
 $y = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ à calculer.

Calcul de $a = \text{coeff. directeur}$

Méthode 1 (avec les points A et B) :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 5}{3 - 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

Méthode 2 (avec un vecteur directeur)

[Rappel : si $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D

alors coeff directeur de D = $\frac{\beta}{\alpha}$]

Ici : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ vecteur directeur

$$\text{donc } a = -\frac{4}{2} = -2$$

Calcul de $b = \text{ordonnée à l'origine}$: on utilise l'un des points.

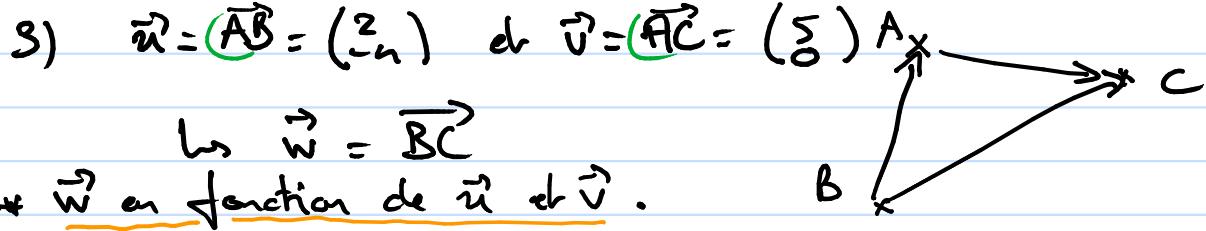
(AB) : $y = -2x + b$. or $A(1; 5) \in (AB)$ donc

$$5 = -2 \times 1 + b \Rightarrow$$

$b = 7$

Conclusion : l'équation réduite de (AB) est :

$$y = -2x + 7$$



Relat° de Chasles : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$$\boxed{\vec{w} = -\vec{u} + \vec{v}}$$

* Coord de \vec{w} :

$$\vec{w} = - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 5 \\ -(-1) + 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\boxed{\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$

* Norme de \vec{w} : [Rappel : Norme de (α, β) = $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$]

Ici : $\|\vec{w}\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$$\boxed{\|\vec{w}\| = 5}$$

4) Produit scalaire: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 5 \times 3 + 0 \times 4 = 15$

[Rappel de la formule : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = aa' + bb'$ (un nombre)]
et

"produit scalaire = 0 \Leftrightarrow perpendiculaires"

Concl: $\vec{v} \cdot \vec{w} \neq 0$, donc \vec{v} et \vec{w} non orthogonaux

or $\begin{cases} \vec{v} = \vec{AC} \\ \vec{w} = \vec{BC} \end{cases}$ donc (AC) et (BC) ne sont PAS perpendiculaires.

(^{et} ABC n'est pas rectangle
en C ...)

5) Soit $H = \text{proj}_{\text{orthogonal}} \text{ de } C \text{ sur } \underbrace{(AB)}_{\text{une droite}}$

on a :

① $\rightarrow H \text{ est sur } (AB)$

② $\rightarrow (CH) \perp (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

équation : $y = -2x + 7$

Pour ② : $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_H - 6 \\ y_H - 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$= 2x_H - 12 - 4y_H + 20$$

$$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = \boxed{2x_H - 4y_H + 8 = 0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_H - 2y_H + 4 = 0}$$

Pour ① : $y_H = -2x_H + 7$

or : $x_H = \boxed{2y_H - 4}$

donc en remplaçant :

$$y_H = -2(2y_H - 4) + 7 \Leftrightarrow y_H = -4y_H + 8 + 7$$

$$\Leftrightarrow 5y_H = 15 \Leftrightarrow \boxed{y_H = 3}$$

et $x_H = 2 \times 3 - 4 = 6 - 4 \Rightarrow \boxed{x_H = 2}$

Conclusion : $H(2; 3)$.

Exercice n° 4 On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f .
2. Déterminer l'image de 1 par f .
3. Déterminer les éventuels antécédents de 1 par f .
4. Montrer que $x^2 - 2x < 0$ quand $x \in]0; 2[$.
5. Montrer que f a pour maximum -1 sur l'intervalle $]0, 2[$.
(Indication : on pourra utiliser que $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$).
6. Montrer que $x^2 - 2x$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
7. Calculer la limite de f en $+\infty$.
8. Calculer la limite à droite de f en 0.

① x est valeur interdite

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

(Rem : on pourrait aussi faire avec Δ)

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

② Image de 1 : $f(1) = \frac{1}{1^2 - 2 \cdot 1} = \frac{1}{-1} : f(1) = -1$

③ Antécédent(s) de 1 : $f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 - 2x} = 1$

$$\Leftrightarrow 1 = x^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2)^2 - 4 \times (1) \times (-1) \\ &= 4 + 4 = 8 (> 0)\end{aligned}$$

Il y a donc 2 solutions : $x_1 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2}$ et $x_2 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2}$

[Rem : $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$!]

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \\ x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

sont les 2 antécédents de 1 par f

$$4. \text{ Rés} \quad \underbrace{x^2 - 2x < 0}_{\text{à}} \quad \text{si } x \in]0; 2[$$

On a : $0 < x < 2$

$$x^2 - 2x = x\underbrace{(x-2)}_{\text{ou}}$$

$$\Leftrightarrow (-2 <) \underline{x-2 < 0}$$

ou

$x \in]0; 2[$ est positif.

donc $x-2 < 0 \Rightarrow \underline{x \cdot (x-2) < 0}$

Autre méthode

$$h(x) = \cancel{x^2} - 2x \quad \text{est 1 fonc:}$$

\uparrow

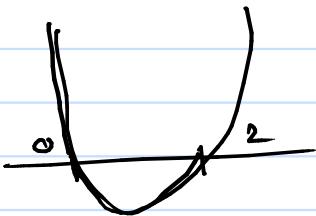
"polynôme de degré 2"

coeff de $x^2 = 1 \cancel{> 0}$

donc tableau de signe :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
signe de $x^2 - 2x$	+	$ \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} $	+	

$x^2 - 2x < 0$ pour $x \in]0, 2[$



5. $f(x) + a$ pour \max à 1 sur $[0, 2]$.

Indice : $x^2 - 2x = \underbrace{(x-1)^2}_{x^2 - 2x + 1} - 1$

Vu ailleurs :

de plus . $x^2 - 2x < 0$, pour $x \in [0, 2]$

. $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \geq -1$

donc

$$[-1] \leq x^2 - 2x < 0$$

la fonction INVERSE

$\frac{1}{x}$
est strictement
DECROISSANTE

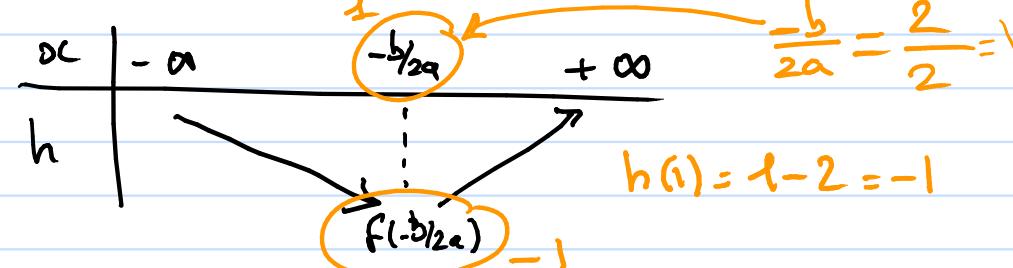
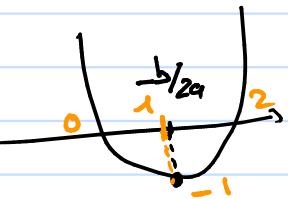
sur $[0, 2]$

$$\frac{1}{-1} \geq \frac{1}{x^2 - 2x} \quad \text{cad: } -1 \geq f(x)$$

[Rappel]: f décroissante : $a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$

Autre méthode : puisque $h(x) = x^2 - 2x$ fonction poly de degré 2,

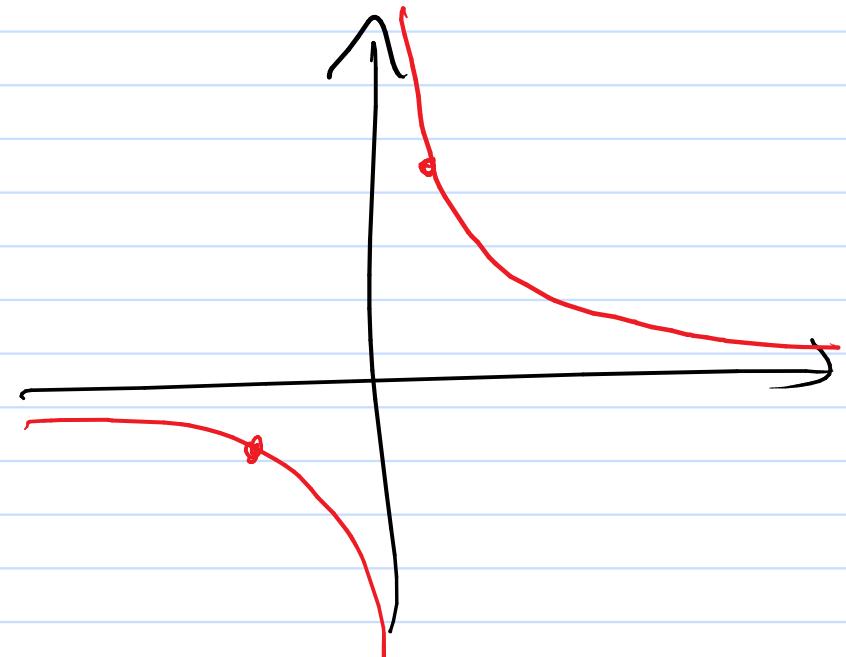
on connaît son TV:



donc $x^2 - 2x \geq -1$ sur \mathbb{R}

fonction inverse
DECROISSANTE
sur $[0, 2]$

$$\frac{1}{x^2 - 2x} \leq \frac{1}{-1} = -1$$



6. If $x^2 - 2x$ tend vers $+\infty$ qd $x \rightarrow +\infty$.

donc we F.I. " $\alpha - \infty$ "

so on factorise:

methode 1: $x^2 - 2x = x^2(1 - \frac{2}{x})$

or. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{x}) = 1 - 0$ } close

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(1 - \frac{2}{x}) = +\infty$

methode 2:

$$x^2 - 2x = x(x-2)$$

on a: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (x-2) = +\infty \end{cases}$

close $\lim_{x \rightarrow \infty} x(x-2) = +\infty$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 2x}$?

On veut de voir que
 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - 2x = +\infty$

donc $\left| \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 2x} = 0 \right|$.

8) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 - 2x}$?

$$\frac{1}{x^2 - 2x} = \frac{1}{x(x-2)}$$

$x \rightarrow 0^+$

donc $\begin{cases} + & x < 0 \\ -2 & \text{(NÉGATIF)} \end{cases}$

$x(x-2)$ est } - arbitrairement PETIT
 } - négatif

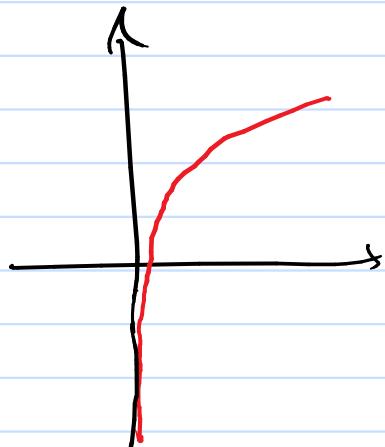
c.-à-d. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(x-2) = 0^-$

donc $\left| \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(x-2)} = -\infty \right|$

Rem : On peut déduire de ça que

$x=0$ est asymptote VERTICALE au graphique de f :

donne une Asymptote au graphique de f ?



Exercice n° 2 On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

1. On considère les points $A(4; 2)$ et $B(8; 1)$.

Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) .

2. Soit (D_1) la droite d'équation $x + 2y = 4$, et (D_2) la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}x + 3$.

Montrer que ces droites sont sécantes et déterminer leur point d'intersection.

① - On a $x_A \neq x_B$ donc (AB) non verticale dr à l'équation
 $y = ax + b$,

$$\text{avec } a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 2}{8 - 4} = \left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$\text{donc : } \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{1}{4}x + b \end{array} \right.$$

$$\text{Puisque } A \in (AB) : 2 = -\frac{1}{4} \cdot 4 + b \Leftrightarrow 2 = -1 + b \Leftrightarrow b = 3$$

Concl^o : $\boxed{(AB) : y = -\frac{1}{4}x + 3}$

② . $(D_1) : x - 2y = 4$ ou $(D_2) : y = -\frac{1}{4}x + 3$

. Rq (D_1) et (D_2) sécantes: vrai si les coeffs directeurs sont \neq !

. Coeff dir de (D_2) : $-\frac{1}{4}$

* Pour (D_1) : $x + 2y = 4 \Leftrightarrow -x + 4 = 2y \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$
donc coeff dir de $(D_1) = \frac{1}{2}$

Concl^o : (D_1) et (D_2) sécantes .

. Coord. des points d'intersection de (D_1): $y = -\frac{1}{2}x + 2$
(D_2): $y = -\frac{1}{4}x + 3$)

on doit résoudre le système

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 & (1) \\ y = -\frac{1}{4}x + 3 \end{cases}$$

qui donne: $-\frac{1}{2}x + 2 = -\frac{1}{4}x + 3$

$$\begin{matrix} \times 4 \\ \Leftrightarrow -2x + 8 = -x + 12 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \Leftrightarrow -x = 12 - 8 = 4 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \Leftrightarrow \cancel{-x} = \cancel{4} \\ x = -4 \end{matrix}$$

et donc (1) donne:

$$y = -\frac{1}{2} \cdot (-4) + 2 = +4$$

Conclusion: le pt d'intersection est $(-4, +4)$