DAEU-B / Maths

_ Mardi 5 Janvier _

Rappels du cours d'hier sur la dérivation.

Soit f une fonction et $a \in D_f$.

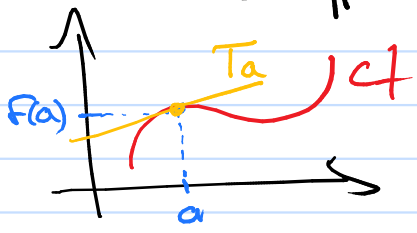
▸ f est DERIVABLE en a si

$$\lim_{x \to a} \underbrace{\boxed{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}}_{\text{taux d'accroissement de } f \text{ en } a.}$$

existe et est un nombre (fini)

Dans ce cas, on note $\boxed{f'(a)}$ cette limite.

▸ Géométriquement, ce nombre $f'(a)$ est le coeff. dir. de la tangente à C_f en a.



Plus généralement, une équation de Ta est :

$$y = f'(a).(x-a) + f(a).$$

▸ f est dérivable sur un intervalle I, si f est dérivable en tout point de I.

▷ Etant donné une fonction f

on lui associe

une nouvelle fonction f', la DERIVÉE de f,
qui, à un nombre $a \in D_f$, associe la dérivée en a : $f'(a)$.

Ex : hier, on a vu que pour $f(x) = \frac{1}{x}$,
et pour tout nombre $a \neq 0$,
f est dérivable et $\boxed{f'(a) = \frac{-1}{a^2}}$

Autrement dit,
la dérivée de la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$
est la fonction $\boxed{f'(x) = \frac{-1}{x^2}}$ (définie sur $\mathbb{R}^*$).

Deux ex. supplémentaire de calcul de fonc° dérivée :

① Fonction Carrée : $g(x) = x^2$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque.

• taux d'accrissemt en a : $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = \dfrac{x^2-a^2}{x-a} = \dfrac{(x-a)(x+a)}{x-a}$

Soit $\boxed{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = x+a.}$

• limite :

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} x+a = a+a = 2a.$$

Conclusion : Quel que soit le nb $a \in \mathbb{R}$,
la fonction carrée est dérivable en a,
et $g'(a) = 2a$.

Donc
la dérivée de g est $\boxed{g'(x) = 2x}$ ||

② Fonction cube : $h(x) = x^3$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque

- taux d'accroissement en a :

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \frac{x^3-a^3}{x-a} = \frac{\cancel{(x-a)}(x^2+ax+a^2)}{\cancel{x-a}}$$

pour simplifier, on remarque que :

$$(x-a)\cdot(x^2+ax+a^2) = x^3 + \cancel{ax^2} + \cancel{xa^2} - \cancel{ax^2} - \cancel{xa^2} - a^3$$
$$= x^3 - a^3$$

soit : $\dfrac{h(x)-h(a)}{x-a} = x^2 + ax + a^2$

- limite en a :

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

Conclusion : Quelque soit $a \in \mathbb{R}$, la fonction cube $h(x) = x^3$ est dérivable en a, et $h'(a) = 3a^2$

Autrement dit,

la dérivée de h est $\boxed{h'(x) = 3x^2}$ ||

À quoi ça sert ?

Soit f une fonction dérivable sur I et f' sa dérivée.

Thm Principal :

(A). Si $f'(x) \geq 0$ sur I alors f est CROISSANTE sur I.

$\leq$ DECROISSANTE

[et si >0 ou <0, alors strictement $\nearrow$ ou $\searrow$]

(B). Si $f'(a) = 0$ pour un nombre $a \in I$

et f' change de signe en a

(positif puis négatif, ou l'inverse)

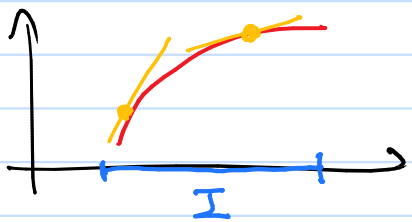
alors

a est un extremum ($\frown$ ou $\smile$)

local de f.

(Pourquoi ça ?)

(A). Si $f'(x) \geq 0$ sur I, ça veut dire que la tangente au graphe à un coeff dir ≥ 0.

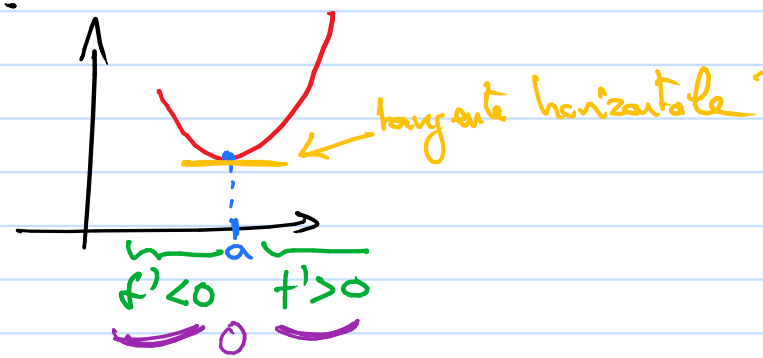


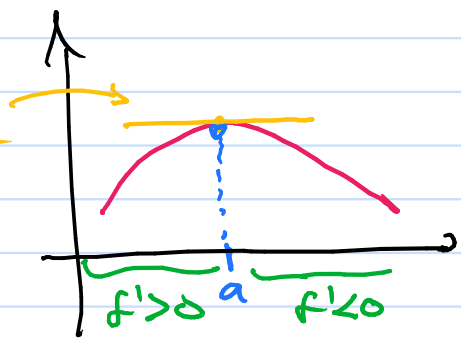
Ici le graphe "monte" autrement dit, f est CROISSANTE !

(B). Si $f'(a) = 0$.

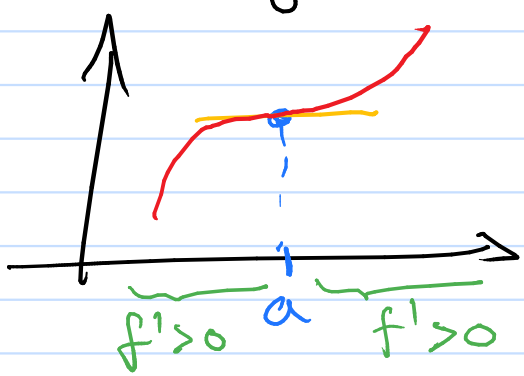
et

f' change de signe en a





⚠ Si $f'(a) = 0$ mais f' ne change PAS de signe en a, il ne s'agit PAS d'un extremum :



~~extremum~~ !

Exemples (sur des cas connus)

① On a vu que $g(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 2x$.

or $\boxed{\begin{cases} 2x > 0 & \text{qd } x > 0 \\ 2x < 0 & \text{qd } x < 0 \end{cases}} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} g \text{ strict} \nearrow \text{ qd } x > 0 \\ g \text{ strict} \searrow \text{ qd } x < 0 \end{cases}}$

pour $x = 0$, $\boxed{g'(x) = 0}$ et change de signe

$\Rightarrow$ 0 est un minimum !

On retrouve bien le TV de la fct° carrée :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$0^2 = 0$

② pour $h(x) = x^3$, on avu que $h'(x) = 3x^2$.

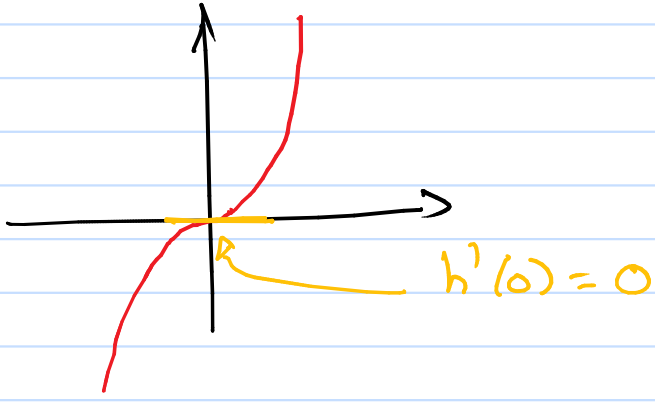
On $3x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$!

$\Rightarrow$ h est croissante sur $\mathbb{R}$.

↳ TV :

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de h'		$+$	
h		$\nearrow$	

) tableau de signe



Le problème maintenant, c'est :

|| si on a une fonction f, comment calculer f' ? sa dérivée

Pour ça, on va donner quelques formules.

FORMULE 1 : on a vu x^2, x^3 ...

la fonction $\boxed{f(x) = x^n}$ avec $n \geq 0$ un entier.

est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$\boxed{f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$$

Ex :

- $n=2$: $f(x) = x^2$ et $f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$.
- $n=3$: $f(x) = x^3$ et $f'(x) = 3 \times x^{3-1} = 3x^2$
- $n=4$: $f(x) = x^4$ et $f'(x) = 4 \times x^3$
- $n=1$: $f(x) = x^{\circ\circ\circ}$ et $f'(x) = 1 \times x^{1-1} = 1 \times \underbrace{x^0}_{=1}$

  ↳ $\boxed{f'(x) = 1}$
- $n=0$: $f(x) = x^0 = 1$ // (fonction constante)

  ↳ $\boxed{f'(x) = 0}$

↳ Plus généralement : si $f(x) = k$ (une constante) // alors $f'(x) = 0$ //

graphe = droite horizontale

Exercice n° 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = 3x^2 - 5x}$ ← utiliser $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ avec $\begin{cases} n = 2 \\ n = 1 \end{cases}$.

a. Calculer la dérivée f' de f.

b. Etudier le signe de f'.

c. En déduire le tableau de variation de la fonction f et montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$, que l'on précisera.

a. Vu : la dérivée de x^2 est $2x$.
et celle de x est 1.

donc : si
$$f(x) = 3 \times x^2 - 5 \times x$$
alors
$$f'(x) = 3 \times (2x) - 5 \times (1) = \boxed{6x - 5}$$

Rem : f' est définie sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$

b. Signe de f' ?

$$f'(x) \geq 0 \iff 6x - 5 \geq 0$$
$$\iff 6x \geq 5$$
$$\iff x \geq 5/6$$

Concl :

x	$-\infty$		$5/6$		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	
f		↘	$-\frac{25}{12}$	↗	

qd $f'(x) > 0$, la fonction f est ↗

c.

$$f(5/6) = 3 \times (5/6)^2 - 5 \times \frac{5}{6} = \frac{25}{12} - \frac{25}{6}$$
$$= -25/12$$

Qd $x = 5/6$,

$f'(x) = 0$ et f' change de signe en $5/6$ (passe de $-$ à $+$)

donc f admet un minimum en $x = 5/6$