DAEU-B / Maths

- Mardi 5 Janvier -

[Retour sur le CC1]

Exercice n° 3 *Pour chacune des fonctions suivantes*

- *donner l'ensemble de définition,*
- *calculer la limite quand x tend vers $+\infty$.*

1. $f(x) = \sqrt{2x-6}$; 2. $g(x) = x^2\left(\frac{1}{x^3} - 1\right)$

3. $h(x) = \sqrt{x} - x$; 4. $k(x) = \frac{3x^3 - 2x + 7}{x^2 - 2x + 1}$

① $f(x) = \sqrt{\underbrace{2x-6}}$

* D_f il faut que $2x - 6 \geq 0$.

Or $2x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 6 \Leftrightarrow \boxed{x \geq 3}$.

Conc : $D_f = [3 ; +\infty[$.

* limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 6 = +\infty$

donc (par composée) $\boxed{\lim\limits_{+\infty} \sqrt{2x-6} = +\infty}$

② $g(x) = x^2\left(\frac{1}{x^3} - 1\right)$.

* D_g : Pour faire $\frac{1}{x^3}$, il faut $x \neq 0$.

donc : $D_g = \mathbb{R}^*$

* Limite en $+\infty$. D'une part, $\lim\limits_{+\infty} x^2 = +\infty$ (positif)

D'autre part. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^3} - 1\right) = 0 - 1 = -1$ (négatif)

$\frac{1}{x^3} \to 0$

Donc par produit,

$$\lim_{+\infty} f(x) = -\infty$$

③ $h(x) = \sqrt{x} - x$

- $\underline{D_h} = [0 ; +\infty[$

- <u>limite en $+\infty$</u> : $h(x) = \underbrace{\sqrt{x}}_{+\infty} \underbrace{- x}_{+\infty}$ ↳ <u>FI : "$\infty - \infty$"</u>

En factorisant : $h(x) = x \left[\frac{\sqrt{x}}{x} - 1 \right]$

$\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

soit : $h(x) = \underbrace{x}_{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right)}_{0 - 1 = -1}$.

par produit :

$$\lim_{+\infty} h(x) = -\infty .$$

Exercice n° 2 *Soit u la fonction définie par* $u(x) = \dfrac{2x-3}{x-3}$.

1. *Donner l'ensemble de définition de u.* $D_u = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
2. *Calculer l'image de 2 par u.* $u(2) = \dfrac{2\times 2-3}{2-3} = 1/_{-1} = -1$
3. *Déterminer le(s) éventuel(s) antécédent(s) de 2 par u.*
4. *Etudier la limite de u en $-\infty$, puis les limites à gauche et à droite de 3.*
5. *En déduire l'existence d'asymptotes au graphe de la fonction u, dont on donnera les équations.*
6. *Soit v la fonction définie par $v(x) = x^2 - x$.*
   Donner les formules des fonctions composées $u \circ v$ et $v \circ u$, et préciser leurs ensembles de définition respectifs.

3. x est antécédent de 2 par u si $u(x) = 2$.

$$u(x) = 2 \iff \frac{2x-3}{x-3} = 2$$

!

$$\iff 2x - 3 = 2(x-3)$$

$$\iff \cancel{2x} - 3 = \cancel{2x} - 6$$

$$\iff -3 = -6 \quad \text{IMPOSSIBLE}$$

Conc : pas d'antécédent !

Exercice n° 2 *Soit u la fonction définie par $u(x) = \dfrac{2x-3}{x-3}$.*

1. *Donner l'ensemble de définition de u.*
2. *Calculer l'image de 2 par u.*
3. *Déterminer le(s) éventuel(s) antécédent(s) de 2 par u.*
4. *Etudier la limite de u en $-\infty$, puis les limites à gauche et à droite de 3.*
5. *En déduire l'existence d'asymptotes au graphe de la fonction u, dont on donnera les équations.*
6. *Soit v la fonction définie par $v(x) = x^2 - x$.*
   Donner les formules des fonctions composées $u \circ v$ et $v \circ u$, et préciser leurs ensembles de définition respectifs.

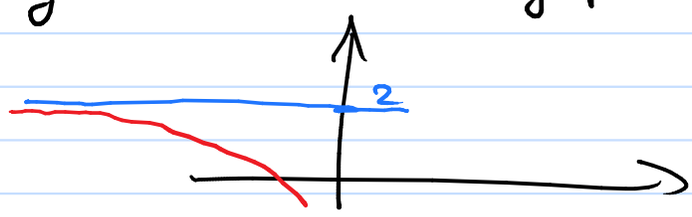
(4). lim en $-\infty$: ↝ F.I. $\frac{\infty}{\infty}$

$$u(x) = \frac{\cancel{x}(2-3/x)}{\cancel{x}(1-3/x)} = \frac{2-3/x}{1-3/x}$$

$3/x \to 0$, $3/x \to 0$

donc $\boxed{\lim_{-\infty} u(x) = 2}$

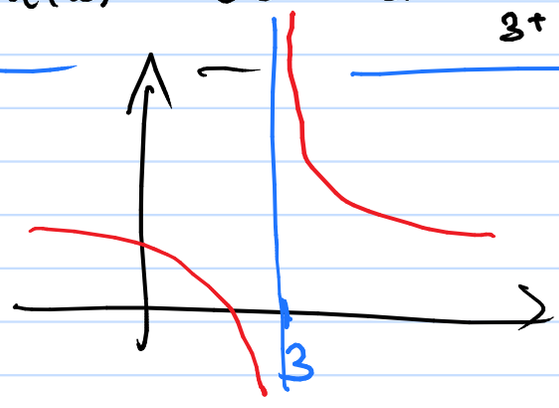
DONC $y = 2$ est une asymptote horizontale



- Gauche / droite de 3 : $u(x) = \dfrac{2x-3}{x-3}$.

  - Déjà : $\lim_{x\to 3} 2x-3 = 2\times 3 - 3 = 6-3 = 3$ (positif)
  - A gauche de 3 : $\lim_{x\to 3^-} x-3 = 0^-$ (négatif)
  - A droite de 3 : $\lim_{x\to 3^+} x-3 = 0^+$ (positif)

DONC $\boxed{\lim_{3^-} u(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{3^+} u(x) = +\infty}$



DONC

$x = 3$ asymptote verticale.