DAEU-B / Maths

- Mardi 5 Janvier -

Suite du cours sur la dérivation :
apprendre à calculer des dérivées.

Vu : Formule 1 : Si $f(x) = x^n$ avec $n \geq 0$ entier alors $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Formule 0 : Si $f(x) = k$ (fonction constante), alors $f'(x) = 0$

On vu bien que la dérivée de la fonction INVERSE $f(x) = \frac{1}{x}$ est $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

Plus Généralement :

$\boxed{\text{Formule 2}}$. Si $f(x) = \frac{1}{x^n}$ avec $n \geq 0$ entier alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\boxed{f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}}$$

Formule 2 : la dérivée de $f(x) = 1/x^n$ est

$$\boxed{f'(x) = -n/x^{n+1}}$$

Ex :

- $n=1$: $f(x) = \dfrac{1}{x^1} \rightsquigarrow f'(x) = \dfrac{-1}{x^{1+1}} = \dfrac{-1}{x^2}$

- $n=2$: $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \rightsquigarrow f'(x) = \dfrac{-2}{x^3}$

- $n=3$: $f(x) = \dfrac{1}{x^3} \rightsquigarrow f'(x) = \dfrac{-3}{x^4}$.

(**Rem** : $\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$ donc la formule 2 dit :

$$(x^{-n})' = -n \times x^{-n-1}$$

(compatible avec formule 1).)

Formule 3 : la fonction racine carrée

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad (D_f = [0, +\infty[)$

a pour dérivée : $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$.

⚠ f' est définie sur $]0; +\infty[$

c-à-d.

f n'est dérivable "que" sur $]0; +\infty[$

(Rem : $\sqrt{x} = x^{1/2}$

donc Formule 3 est compatible avec Formule 1)

Par ailleurs

- dérivée est 'compatible' avec + et − :

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

ex :

$$(3x^2 - 5x)' = 3 \times (x^2)' - 5 \times (x)'$$
$$= 3 \times 2x - 5 \times 1$$
$$= 6x - 5.$$

Exemple :

Formule 1 Formule 2 Formule 3 Formule 0

$$f(x) = 7x^4 - 5x^2 + \frac{3}{x^2} + 4\sqrt{x} + 5$$

dérivée

$$f'(x) = 7 \times (4 \cdot x^3) - 5 \times (2x) + 3 \times \left(\frac{-2}{x^3}\right) + 4 \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + 0$$

$$\boxed{f'(x) = 28x^3 - 10x - \frac{6}{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x}}}.$$

Exercice n° 7

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, donner l'ensemble de définition, l'ensemble des valeurs pour lesquelles la fonction est dérivable, puis la formule de la fonction dérivée :

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4 \quad ; \quad g(x) = x^2 + 3x - \frac{1}{x^2}$$

$$h(x) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \quad ; \quad l(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$$

$$\boxed{m(x) = (2x+3)(3x-7)} \quad ; \quad n(x) = \frac{2x+4}{3x-1}$$

$$r(x) = \frac{x^2-1}{x} \quad ; \quad s(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$$

produit/quotients

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$$

$$f'(x) = 3(4x^3) - 2(3x^2) + 5 - 0$$

soit : $\boxed{f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 5.}$

$$g(x) = x^2 + 3x - \frac{1}{x^2}$$

$$g'(x) = 2x + 3 - \left(\frac{-2}{x^3}\right)$$

soit $\boxed{g'(x) = 2x + 3 + \frac{2}{x^3}}$

* $m(x) = (2x+3)(3x-7)$ on sait faire ... en développant :

$m(x) = 6x^2 - 14x + 9x - 21 = 6x^2 - 5x - 21$

donc $m'(x) = 6 \times (2x) - 5 \times (1) - 0$

soit $\boxed{m'(x) = 12x - 5}$

Mais en général, on a besoin d'un règle qui dit comment dériver un PRODUIT !

Règle du produit : la dérivée d'un produit $\boxed{u(x) \times v(x)}$

est $\boxed{u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)}$

Exemples : $m(x) = (2x+3) \times (3x-7)$

de la forme $u(x) \times v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = 2x+3 \\ v(x) = 3x-7 \end{cases}$

On a : $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = 3. \end{cases}$

donc, par la règle du produit :

$$m'(x) = 2 \times (3x-7) + (2x+3) \times 3$$

$$= 6x - 14 + 6x + 9$$

soit $\boxed{m'(x) = 12x - 5}$

Règle du Produit : la dérivée de $u(x) \times v(x)$ est $\boxed{u'(x).v(x) + u(x) \times v'(x)}$

Exo : Dérivée de . $h(x) = \sqrt{x} \times \left(1 - \frac{1}{x}\right)$

. $f(x) = (x^3 - 2x^2) \times \frac{1}{x^2}$

* $h(x)$ est de la forme $u \times v$ avec $\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ v(x) = 1 - 1/x \end{cases}$

On a : $\begin{cases} u'(x) = 1/(2\sqrt{x}) \\ v'(x) = 0 - (-1/x^2) = 1/x^2 \end{cases}$

donc :

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \sqrt{x} \times \left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\boxed{h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}}$$

* $f(x) = (x^3 - 2x^2) \times \frac{1}{x^2}$

de la forme $u(x) \times v(x)$ où $\begin{cases} u(x) = x^3 - 2x^2 \\ v(x) = 1/x^2 \end{cases}$

On a : $\begin{cases} u'(x) = 3x^2 - 2 \times (2x) = 3x^2 - 4x \\ v'(x) = -2/x^3 \end{cases}$

donc : $f'(x) = (3x^2 - 4x) \times \frac{1}{x^2} + (x^3 - 2x^2) \times \frac{-2}{x^3}$.

...