DAEU-B / Maths

Lundi 4 Janvier

Cours sur la DÉRIVATION

Idée. Etant donnée une fonction donnée par 1 formule

(?) Quel est son tableau de variation ?

→ OK pour les fonctions du ret.

Ex : $f(x) = \underbrace{2}_{>0.}x^2 - 3x + 1$. [poly. degré 2]

le cours dit que le T.V. est :

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a} = \frac{3}{4}$		$+\infty$
f		↘	$f\left(\frac{3}{4}\right)$	↗	

Mais plus compliqué pour 1 fonction quelconque :

$g(x) = 2x^2 + \cos x$

$h(x) = 3x^3 - x^2 + 3x$

→ quel est son TV ?

OUTIL pour cela : la notion de Dérivée

Notion de Dérivée

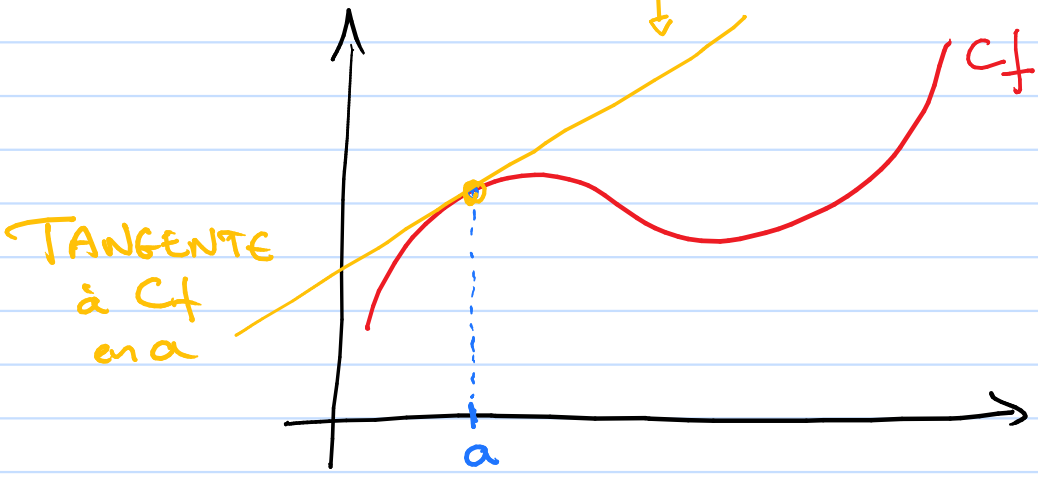
Etant donnée une fonction (f) $\rightsquigarrow$ la dérivée de f : une nouvelle fonction f', calculée à partir de f, et qui "mesure" les variations de f.

mesure L'INCLINAISON du graphe de f

I) Dérivée en un point

(↳ un nombre qui mesure l'inclinaison du graphe en un point)

$a \in D_f$.

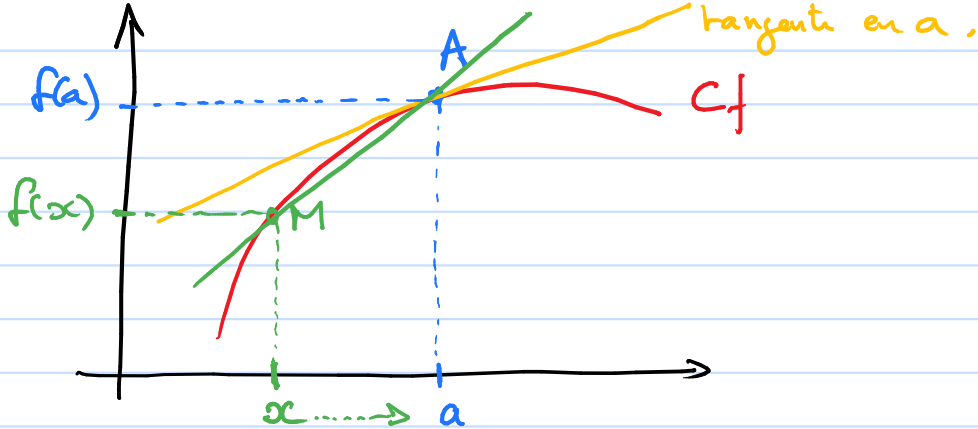


... donnée par le COEFFICIENT DIRECTEUR de la Tangente à C_f en ce point.

Donc : La dérivée de f au point a

= un nombre, noté $f'(a)$,
le
coefficient directeur de la tangente
à C_f au point a.

Pb : Comment on calcule ça ?



Prenons un autre point $x \neq a$.

Alors on sait que le coeff. dir de la droite (AM) est $\boxed{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}$

(!) Si x se rapproche de a,

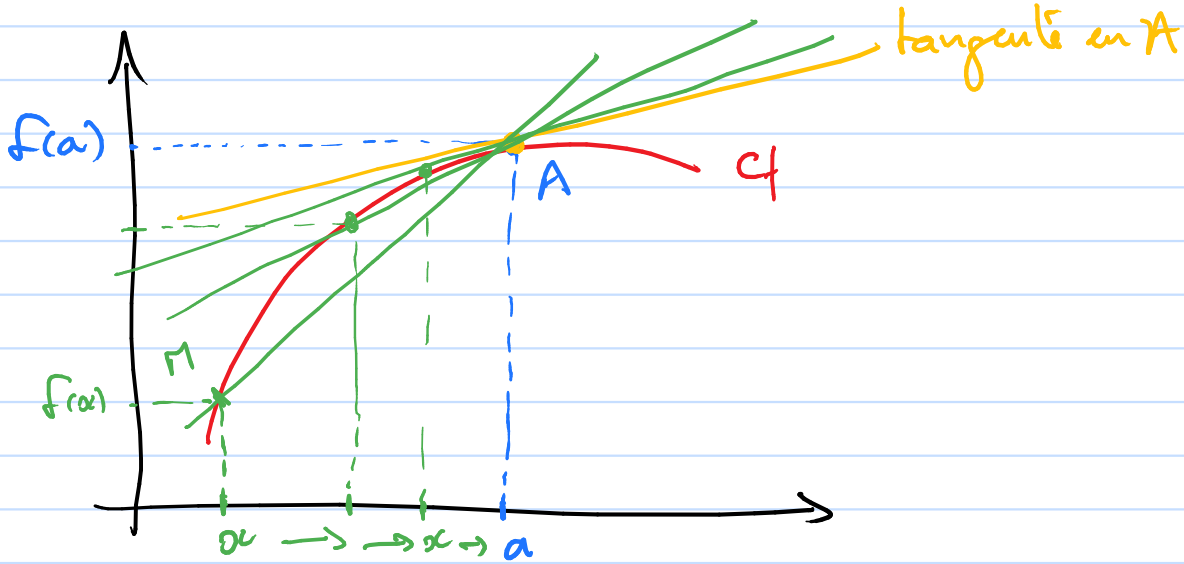
alors

M se rapproche de A,

et la droite

(AM) se rapproche de la tangente en A.

Visuellement :



Idée : la tangente en A est la limite des droites (AM) qd $x \to a$!!

le coeff directeur

$\boxed{f'(a)}$ = limite de ce coeff directeur.
$x \to a$

Définition : Soit f une fonction et $a \in D_f$.

f est dérivable en a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ existe et est un nombre réel.

Dans ce cas,
la dérivée de f en a est ce nombre :

$$\boxed{f'(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

coeff. dir de la tangente en a.

coeff. dir de la droite (AM)

- On appelle " $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ " le taux d'accroissement de f en a.

Quelques exemples concrets.

① $f(x) = 2x - 1$ est derivable en $x = 2$.

Cela signifie : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ est un nombre

($f'(2)$, le dérivée de f en 2)

Voyons ça :

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{2x - 1 - (2 \times 2 - 1)}{x - 2} = \frac{2x - 4}{x - 2}$$

$$= \frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = 2.$$

ici, $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 2$,

donc, évidemment. $\lim\limits_{x \to 2} \boxed{\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}} = 2$.

Conclusion : f est bien dérivable en $a = 2$, et $f'(2) = 2$.

② $g(x) = x^2$ est-elle dérivable en $x = 2$?

1. On considère le "taux d'accroissement en 2" :

$$\frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \frac{x^2-4}{x-2} \xrightarrow[x\to 2]{} ?$$

$x^2-4 \to 0$, $x-2 \to 0$

tjs une F.I. "$\frac{0}{0}$"

en général $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ($f(x)-f(a) \to 0$, $x-a \to 0$)

ici, $x^2-4 = (x-2)(x+2)$

donc

$$\boxed{\frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = x+2}$$

lors il faut tjs simplifier.

2. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = 2+2 = 4$. un nombre.

Conclusion :

$g(x) = x^2$ est dérivable en 2 et $g'(2) = 4$

inclinaison de la tangente à $\mathcal{C}_g$ en $x = 2$!

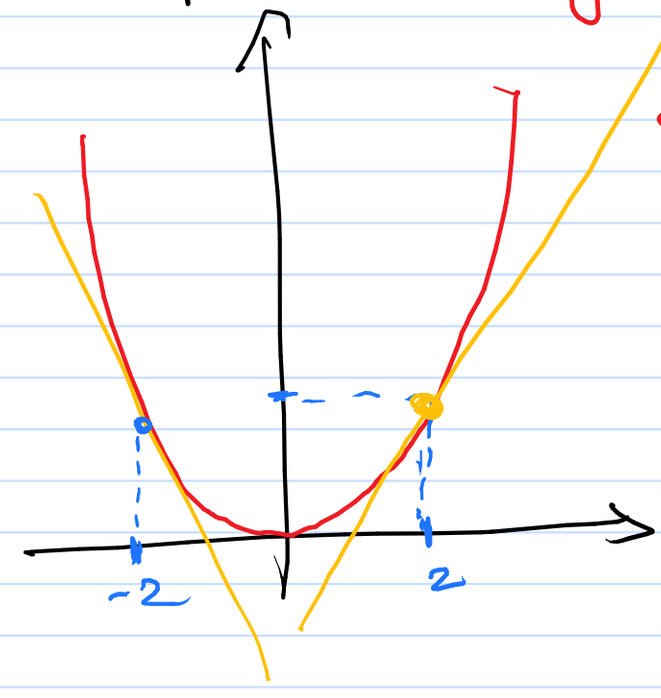
Exercice :

- $g(x) = x^2$ est-elle dérivable en -3 ?
- $h(x) = x^2 + 2x - 1$ est-elle dérivable en 2 ?

Géométriquement :

$g'(2) = 4$

coeff dir



⑤ $g(x) = x^2$ dérivable en -3 ?

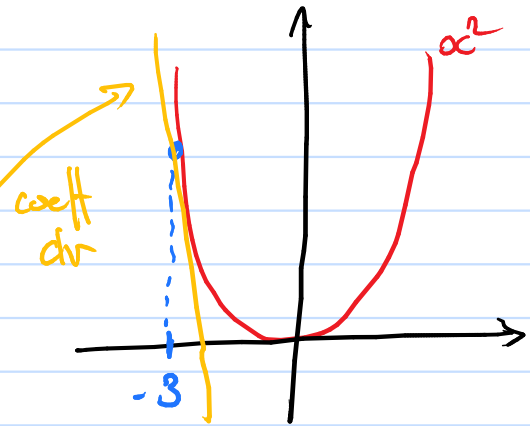
1- écrire & simplifier le taux d'accroissement en -3 :

$$\frac{g(x) - g(-3)}{x - (-3)} = \frac{x^2 - 9}{x+3} = \frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}} = x - 3 .$$

2. limite qd $x \to -$:

$$\lim_{x \to -3} \frac{g(x) - g(-3)}{x+3} = \lim_{x \to -3} x - 3 = -3 - 3 = -6$$

Concl : g dérivable en -3 et $g'(-3) = -6$



En suite :

$h(x) = x^2 + 2x - 1$ dérivable en 2 ?

④ $h(x) = x^2 + 2x - 1$ dérivable en $a = 2$?

1. taux d'accroissement en 2 :

$$\frac{h(x) - h(2)}{x-2} = \frac{(x^2 + 2x - \cancel{1}) - (2^2 + 2\times 2 - \cancel{1})}{x-2}$$

$$= \frac{x^2 - 2^2 + 2x - 2\times 2}{x-2}$$

$x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$

$2x - 2\times 2 = 2(x-2)$

$$= \frac{\cancel{(x-2)}(x+2) + 2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}$$

$$\boxed{\frac{h(x)-h(2)}{x-2} = x+2+2 = x+4.}$$

2. limite en 2 :

$$\lim_{x\to 2} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+4 = 2+4 = 6$$

Conc : h dérivable en 2 et $h'(2) = 6$